

**Опыт и особенности применения ленты Мебиуса в решении научных и технических задач. Новая модель функционирования сердца: Геометрические-Физические-Физиологические свойства листа Мёбиуса**

Арутюнов Ю.А., к.ф.-м.н., ведущий научный сотрудник, ФГБУ «Федеральный научно-клинический центр спортивной медицины и реабилитации» ФМБА России

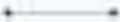
# Содержание

1. Геометрические свойства листа Мёбиуса
2. Применение геометрических свойств листа Мёбиуса для созния новых устройств
3. Физические свойства листа Мёбиуса
4. Применение физических свойств листа Мёбиуса для создания новых устройств и технологий
5. Физиологические свойства листа Мёбиуса
6. Применение физиологических свойств листа Мёбиуса для моделирования внезапной сердечной смерти(ВСС) в рамках новых представлений об анатомии и морфологии миокарда

# РАЗДЕЛ 1

## Геометрические свойства листа Мёбиуса

# Топологическое описание геометрических фигур и поверхностей

Название	Вид	Эйлерова характеристика
Отрезок		1
Окружность		0
Диск		1
Сфера		2
Тор (прямое произведение двух окружностей)		0
Два тора		-2
Три тора		-4

Единственная трехмерная плоскость		1
Лентка Мёбиуса		0
Бутылка Клейна		0
Два сферы (неплотные)		$2+2=4$
Три сферы		$2+2+2=6$

# Определение Эйлеровой характеристики гладких фигур и поверхностей

## Эйлерова характеристика полиэдров [\[ править \]](#) [\[ править вики-текст \]](#)

- Эйлерова характеристика двумерных топологических полиэдров может быть посчитана по формуле:  $\chi = \Gamma - P + B$  где  $\Gamma$ ,  $P$  и  $B$  суть числа граней, рёбер и вершин соответственно. В частности, для односвязного многогранника верна формула Эйлера:

$$\Gamma - P + B = \chi(S^2) = 2.$$

Например, Эйлерова характеристика для куба равна  $6 - 12 + 8 = 2$ , а для треугольной пирамиды  $4 - 6 + 4 = 2$ .

## Формула Гаусса — Бонне [\[ править \]](#) [\[ править вики-текст \]](#)

Для компактного двумерного ориентированного риманова многообразия (поверхности)  $S$  без границы существует формула Гаусса — Бонне, связывающая эйлерову характеристику  $\chi(S)$  с гауссовой кривизной  $K$  многообразия:

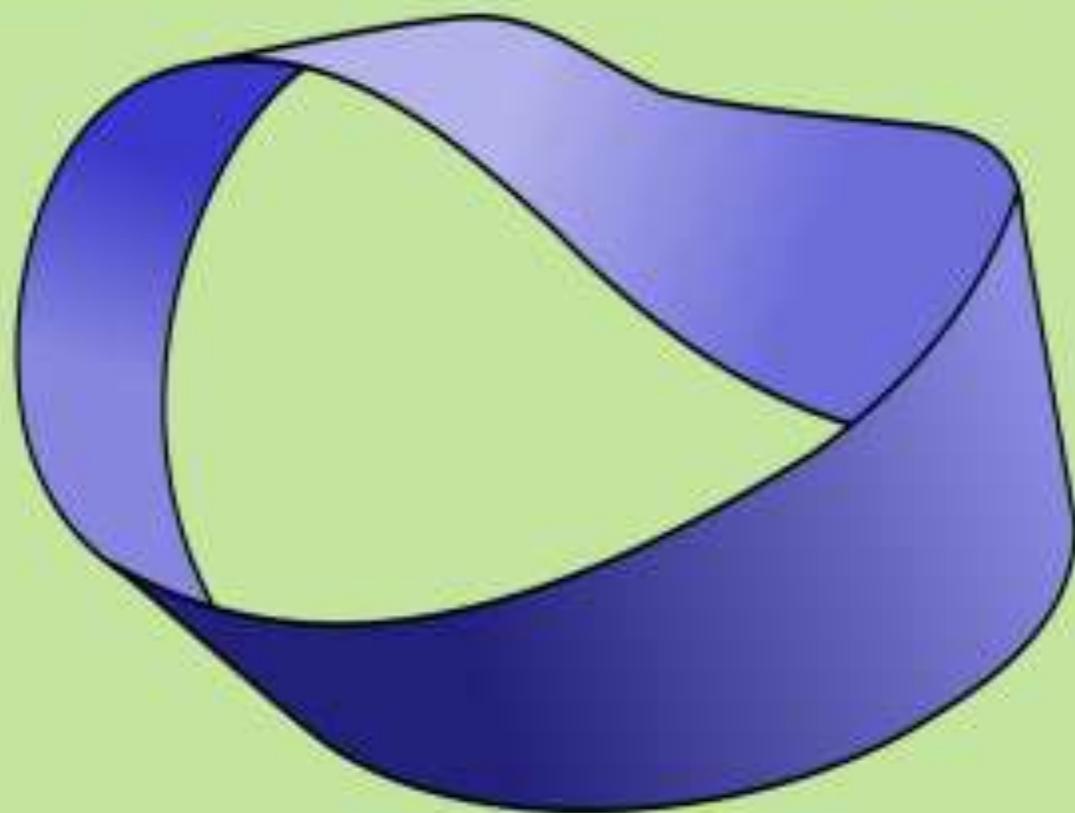
$$\int_S K \, d\sigma = 2\pi\chi(S),$$

где  $d\sigma$  — элемент площади поверхности  $S$ .

# О листе Мёбиуса

Изучением ленты Мёбиуса и множества других интересных объектов занимается – **топология**, раздел математики, который исследует неизменные свойства объекта при его непрерывной деформации – растяжении, сжатии, изгибе, без нарушения целостности.

"Отцом" открывателем этой необычной ленты признан немецкий математик **Август Фердинанд Мебиус**, ученик Гаусса, написавший не одну работу по геометрии, но прославившийся преимущественно открытием односторонней поверхности в 1858 году.



# Геометрическое описание листа Мебиуса

- Одним из способов представления листа Мёбиуса как подмножества является параметризация:

$$x(u, v) = \left(1 + \frac{v}{2} \cos \frac{u}{2}\right) \cos(u),$$

$$y(u, v) = \left(1 + \frac{v}{2} \cos \frac{u}{2}\right) \sin(u),$$

$$z(u, v) = \frac{v}{2} \sin \frac{u}{2},$$

где  $0 \leq u < 2\pi$  и  $(r, \theta, z)$

Эти формулы задают ленту Мёбиуса ширины 1, чей центральный круг имеет радиус 1, лежит в плоскости  $x$ - $y$  с центром в  $(0;0;0)$ . Параметр  $u$  пробегает вдоль ленты, в то время как  $v$  задает расстояние от края.

- В цилиндрических координатах  $-1 \leq v \leq 1$ , неограниченная версия листа Мёбиуса может быть

представлена уравнением:  $\log(r) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = z \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ .

# Формульные выражения для периметра полосы Мёбиуса $L$ и площади полосы Мёбиуса $S$

$$L=4\pi R(1+\Lambda^2/8R^2),$$

$$S=4\pi R\Lambda(1+\Lambda^2/24R^2),$$

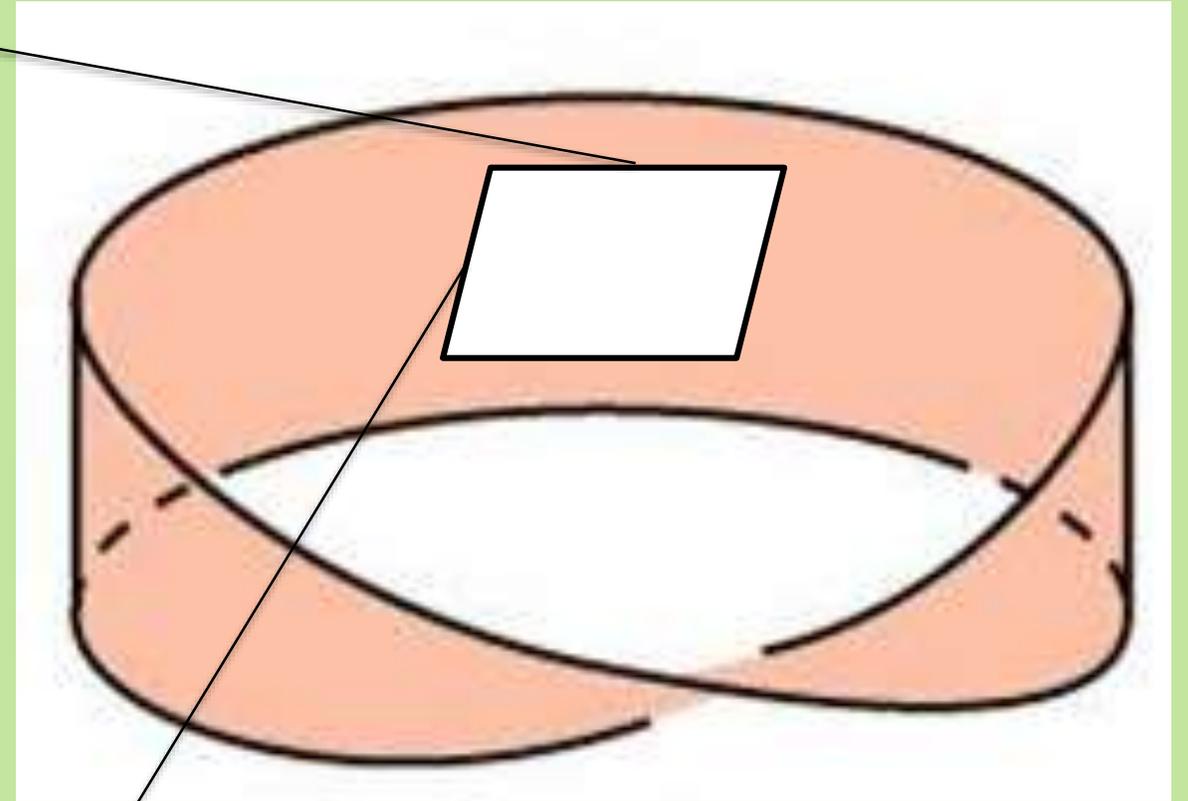
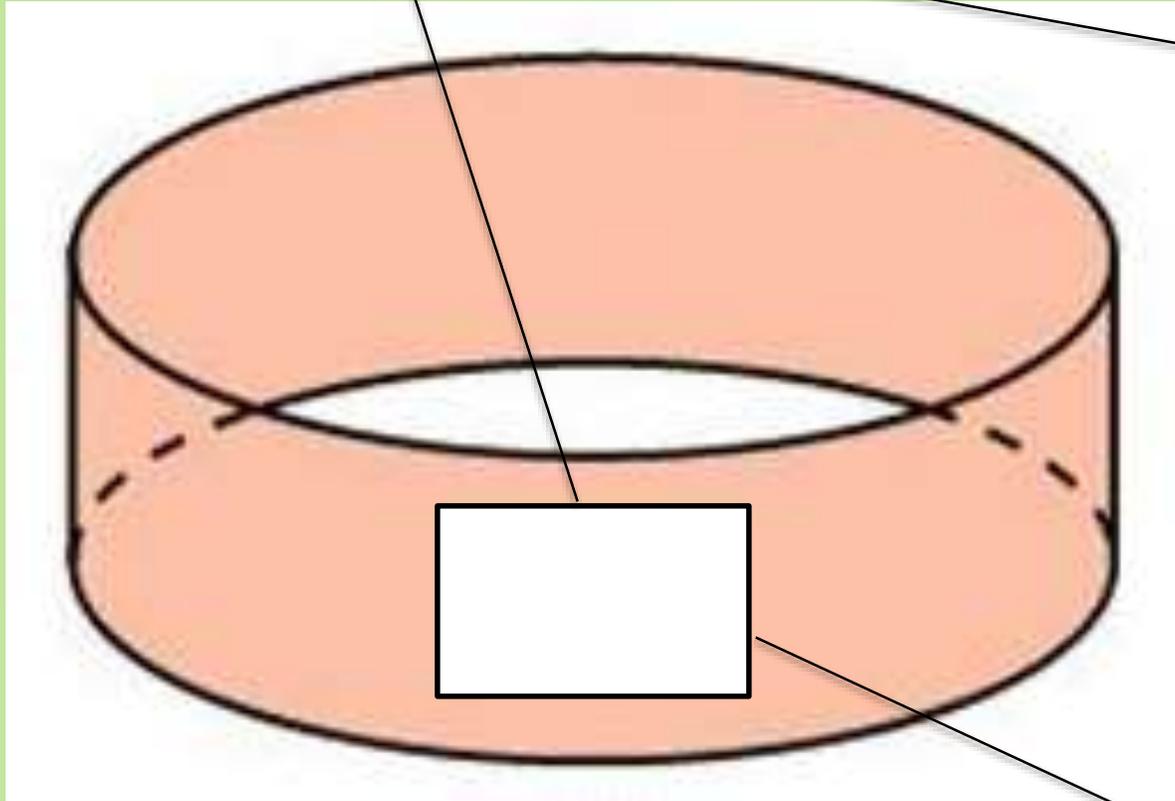
где  $\Lambda$  - полуширина полосы Мёбиуса;  $R$  - радиус окружности, образующей лист Мёбиуса. Данные формулы получены и справедливы для случая, когда  $\Lambda \ll R$ .

# Раздел 2

**Применение геометрических свойств листа  
Мёбиуса для создания новых устройств**

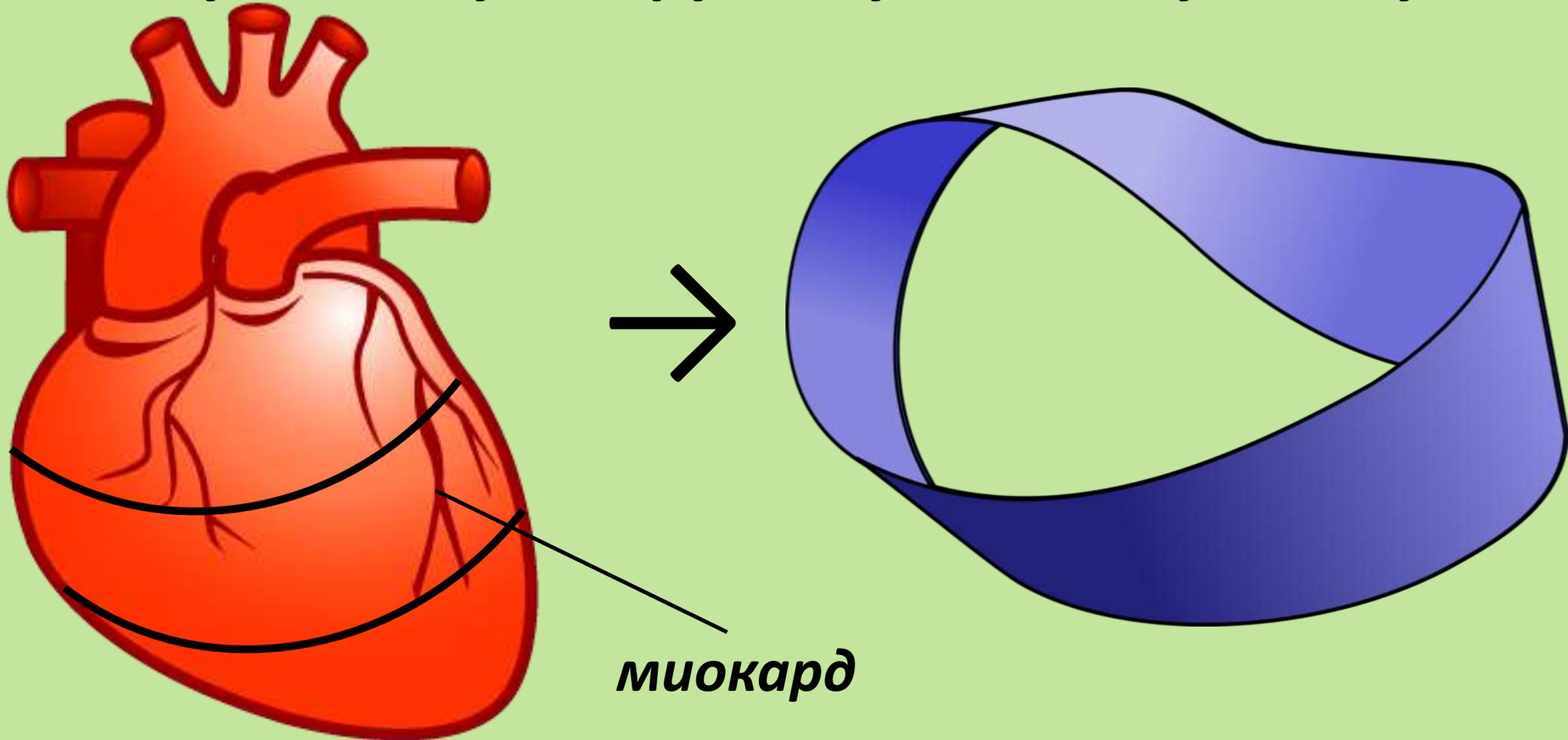
# Вырез некоторой области на цилиндрической полосе и на листе Мёбиуса

Продольный разрез

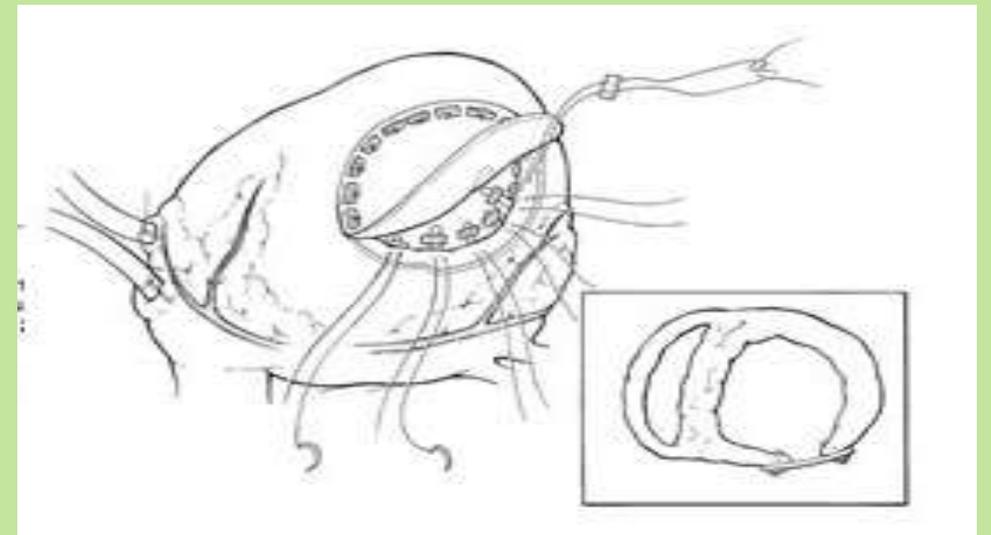
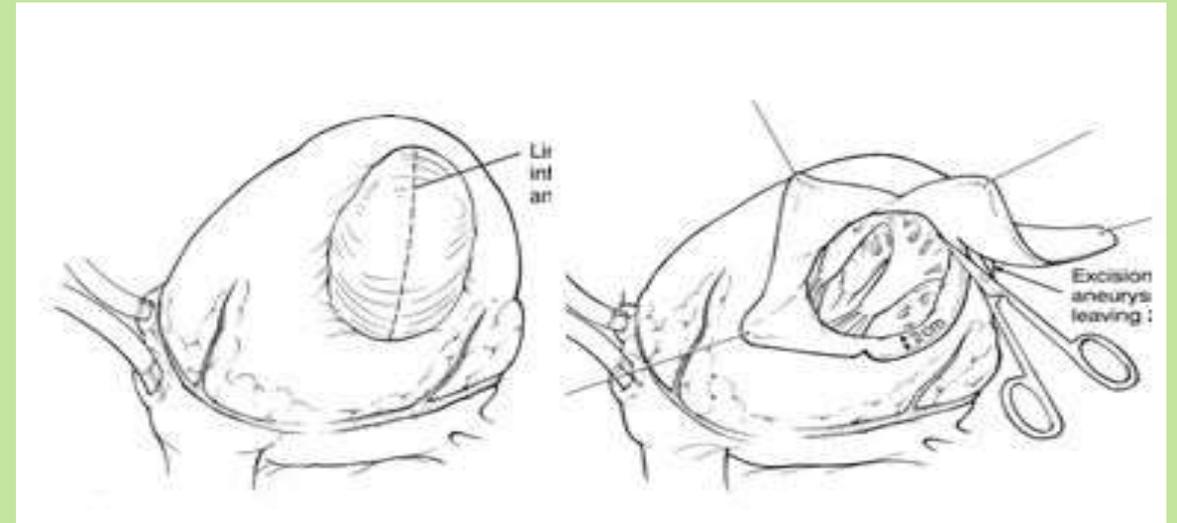
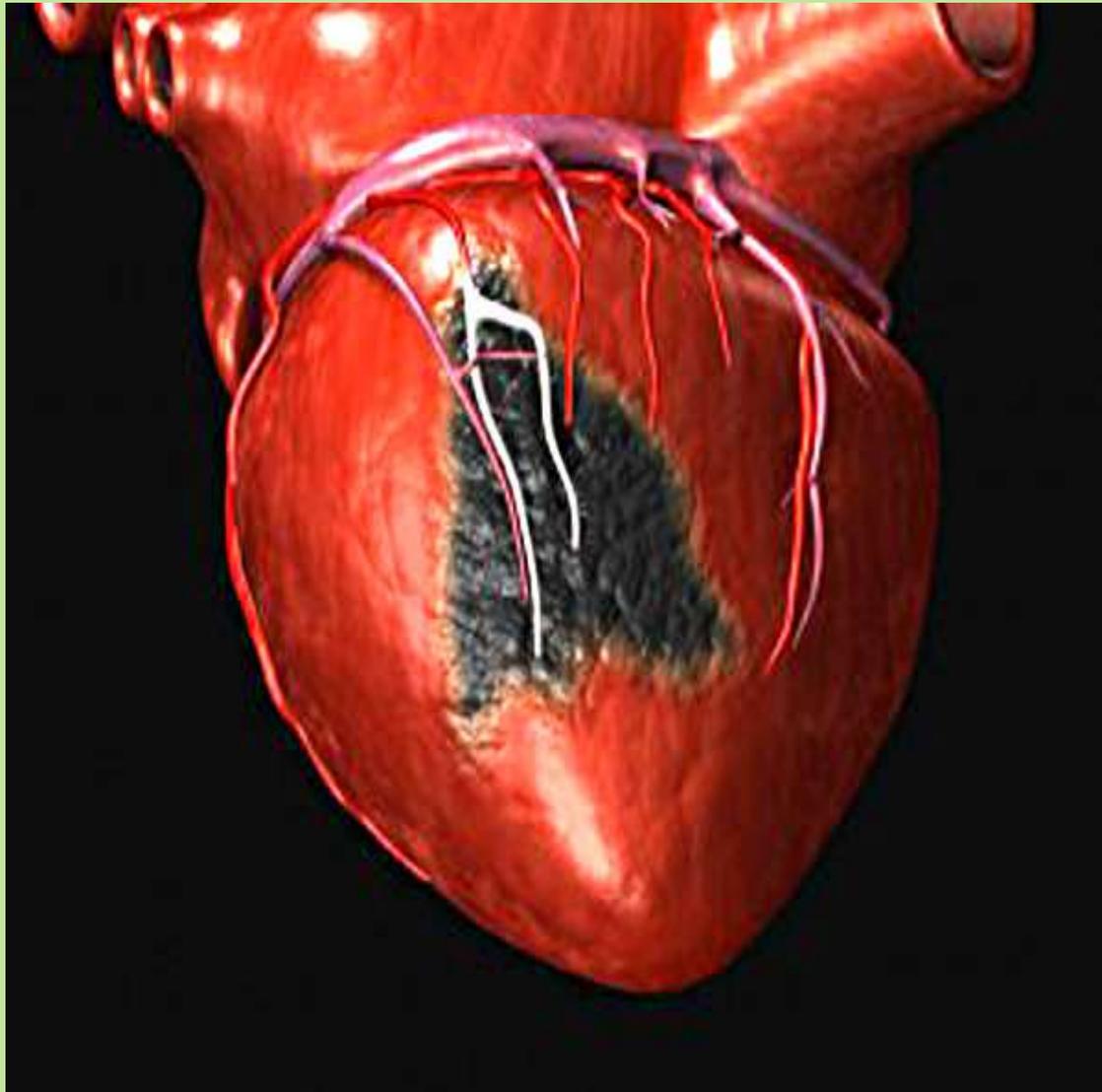


Поперечный разрез

# Открытие разворачивания миокарда сердца в "толстую изогнуто-скрученную" полосу Мёбиуса



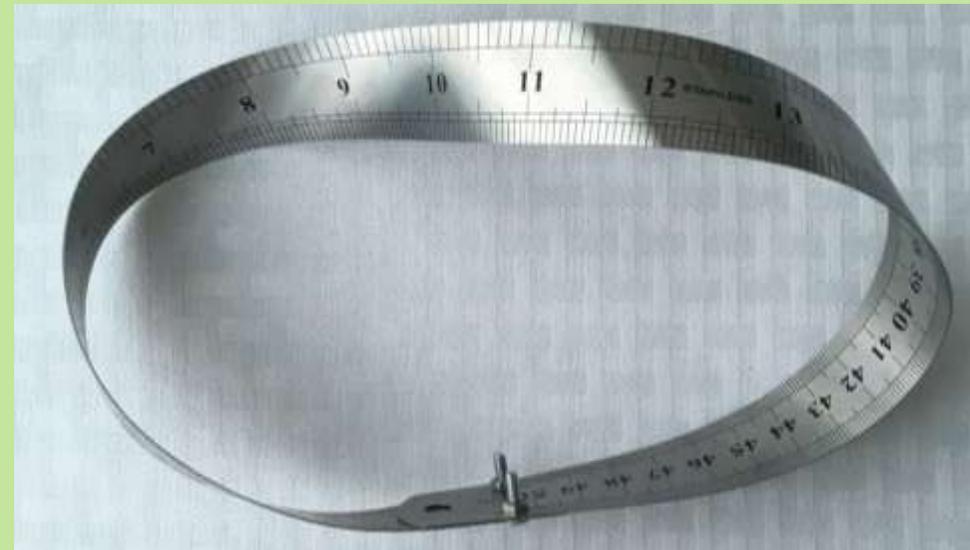
# Применение результатов исследования поперечного и продольного разрезания листа Мёбиуса в кардиохирургии



## **РАЗДЕЛ 3**

# **Физические свойства листа Мёбиуса**

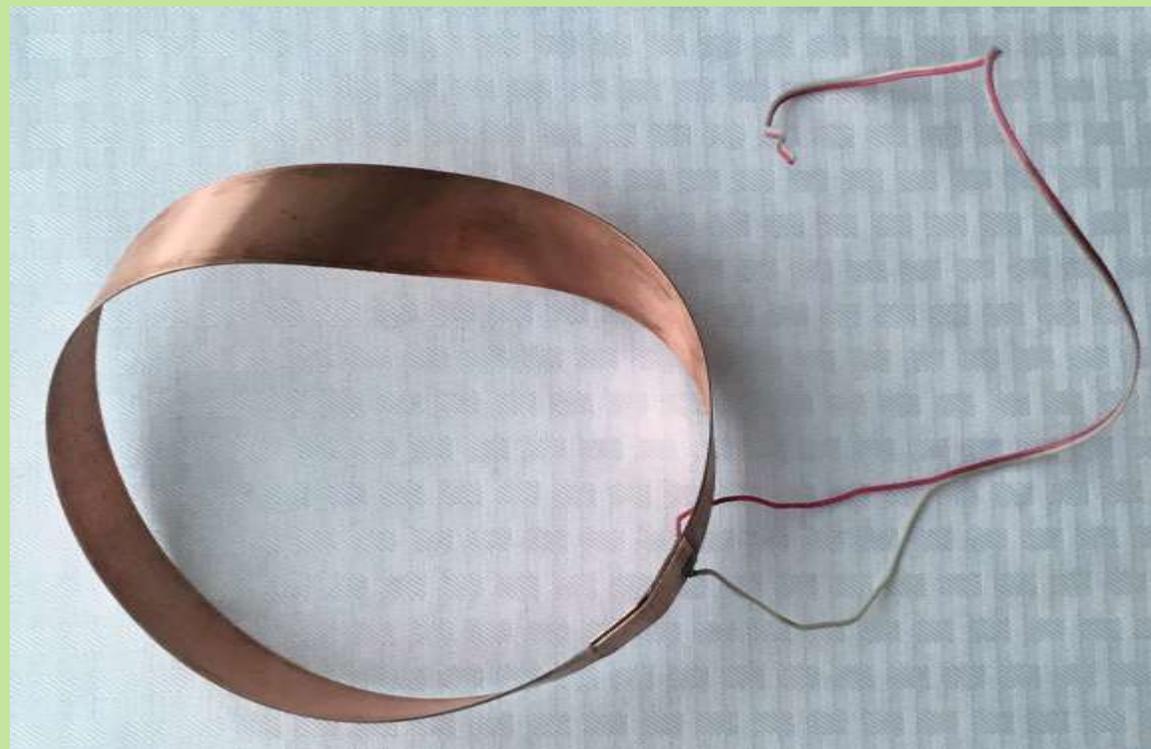
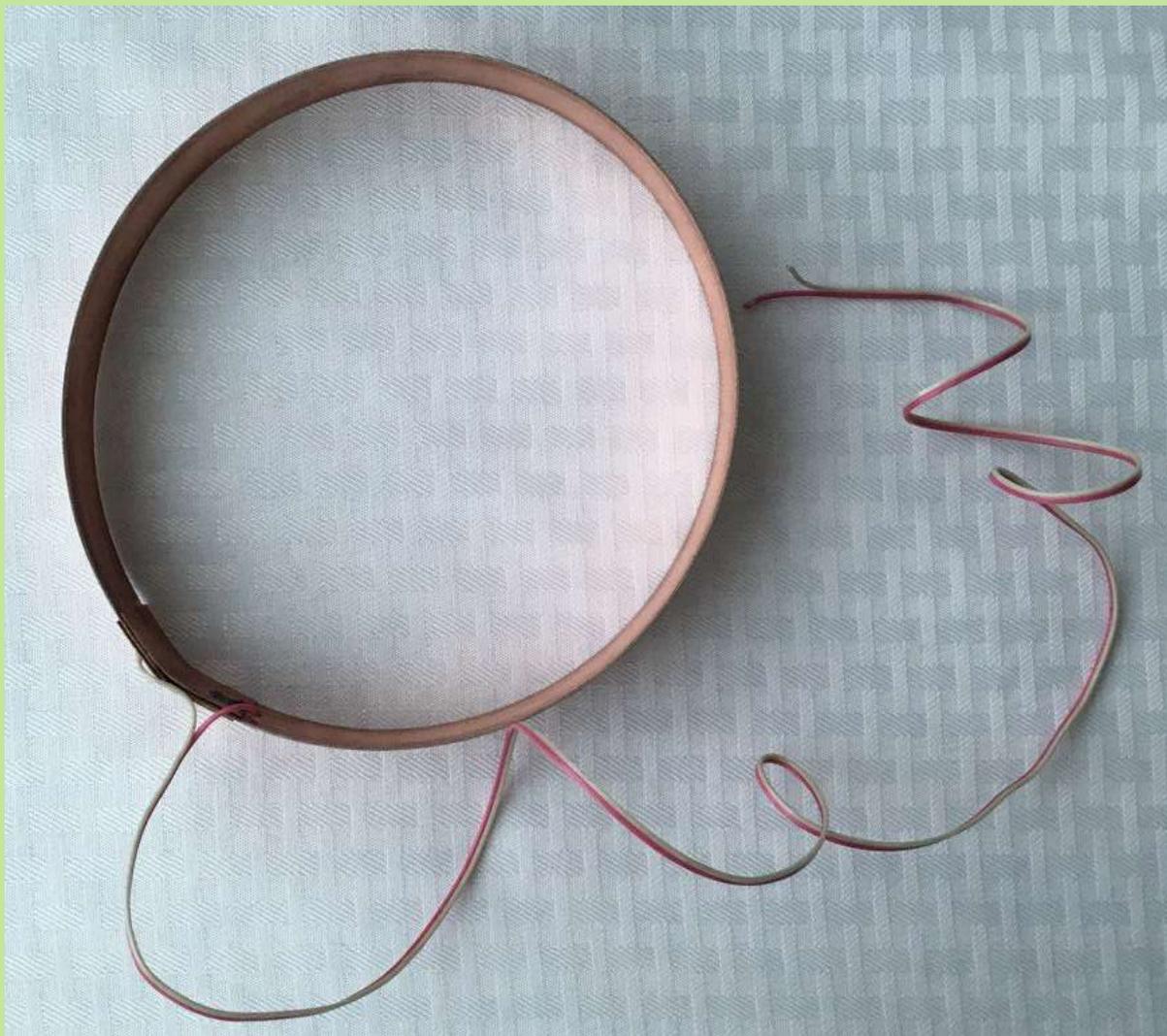
# Экспериментальные образцы для исследования физико-механических характеристик полосы



# Исследования частотных характеристик "полосы Мёбиуса" и кольцевой полосы

- Экспериментальным путём проведены сравнительные исследования частотных характеристик силовой конструкции в виде "полосы Мёбиуса" и кольцевой полосы одинаковой длины, ширины и толщины.
- На основе экспериментальных исследований показано, что частота собственных колебаний "полосы Мёбиуса" вдвое меньше, чем частота собственных колебаний кольцевой полосы.

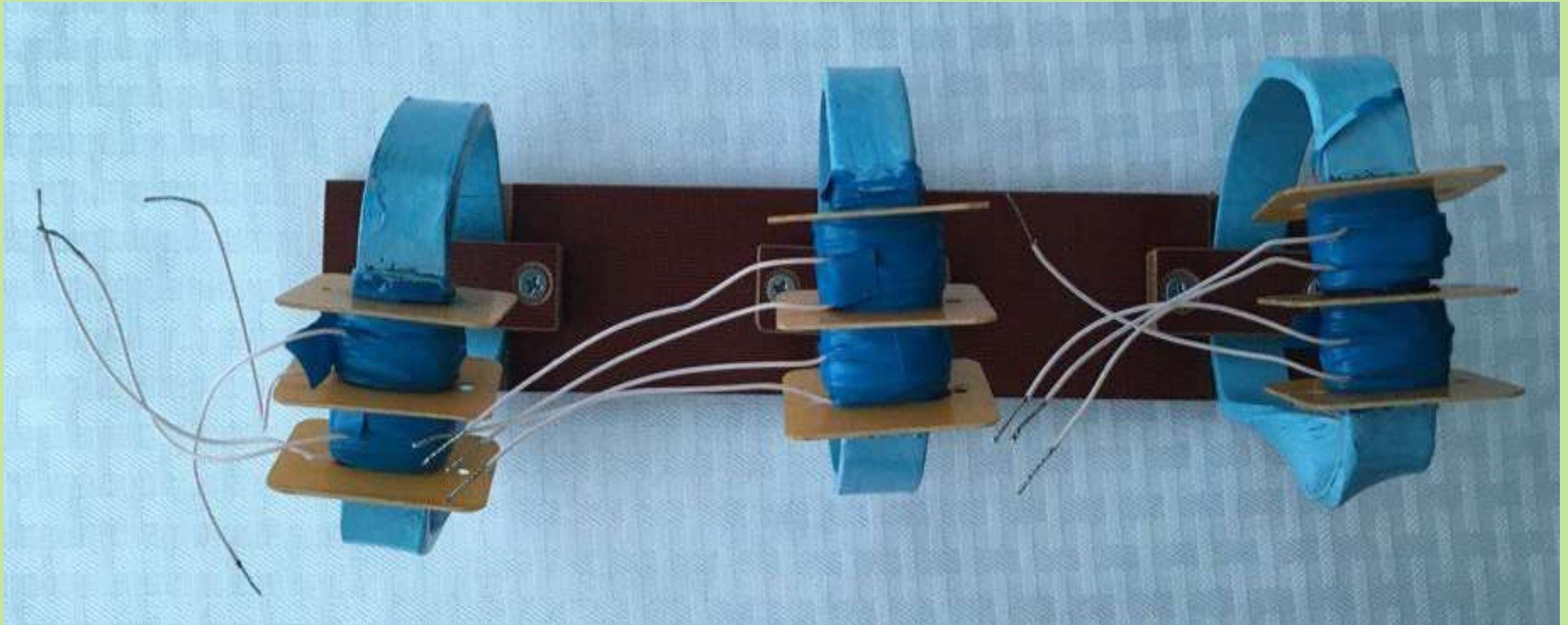
# Экспериментальные образцы для исследования электро- физических характеристик полосы Мёбиуса



# Исследования индуктивного сопротивления "полосы Мёбиуса" и кольцевой полосы

- Экспериментальным путём проведены сравнительные исследования индуктивного сопротивления "полосы Мёбиуса" и кольцевой электропроводящей полосы одинаковой длины, ширины и толщины.
- На основе экспериментальных исследований показано, что индуктивное сопротивление электропроводящей "полосы Мёбиуса" примерно вдвое меньше, чем индуктивное сопротивление электропроводящей кольцевой полосы, а при определённой частоте тока индуктивное сопротивление равно нулю, то есть "полоса Мёбиуса" обладает только активным сопротивлением.

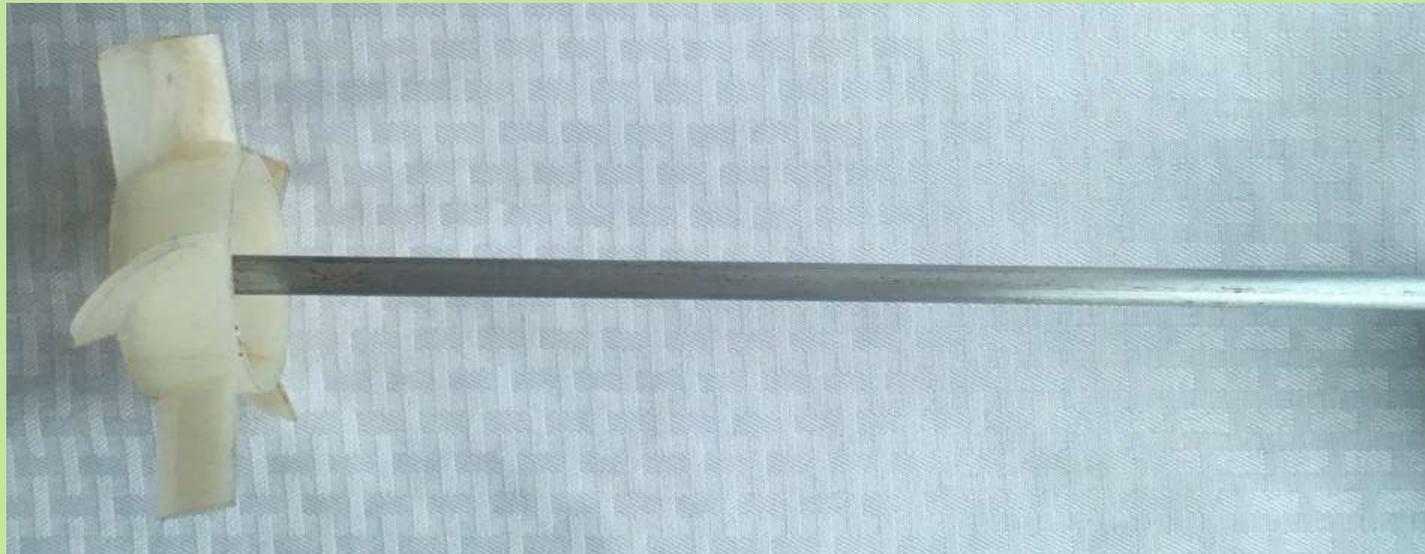
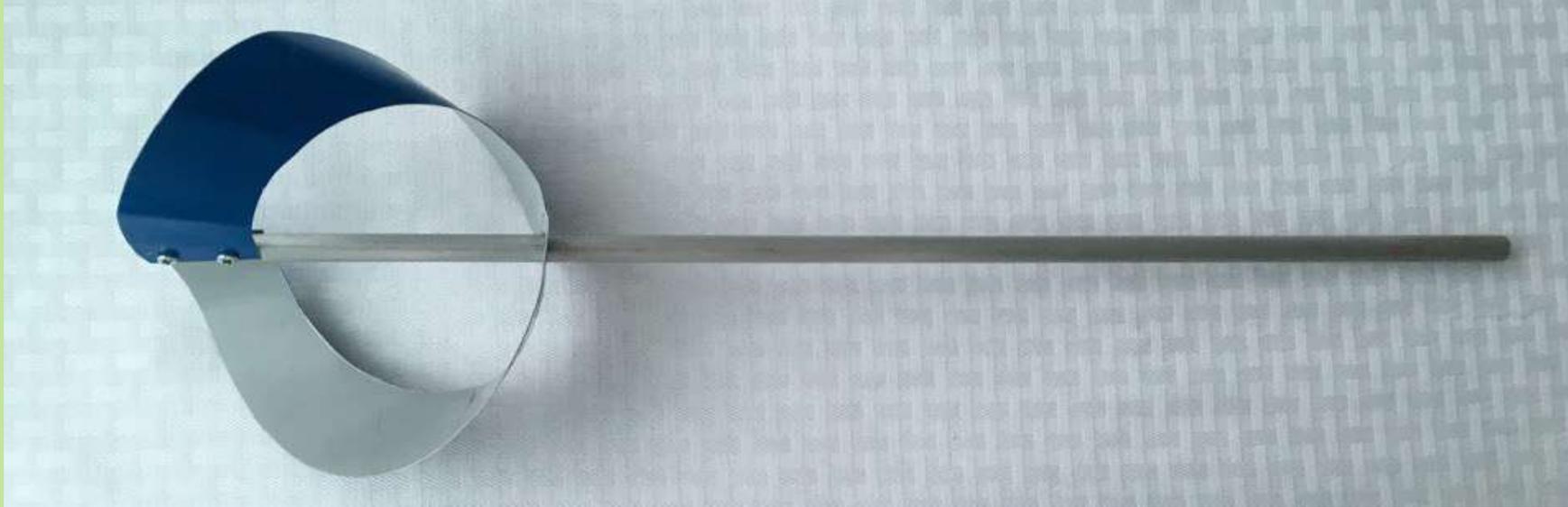
# Экспериментальные образцы для исследования магнито-физических характеристик полосы Мёбиуса



# Исследования магнитной индукции "полосы Мёбиуса" и кольцевой полосы

- Экспериментальным путём проведены сравнительные исследования магнитной индукции "полосы Мёбиуса" и кольцевого магнитопровода одинаковой длины, ширины и толщины.
- На основе экспериментальных исследований показано, что магнитная индукция "полосы Мёбиуса" заметно меньше, чем магнитная индукция кольцевой полосы. Этот факт свидетельствует о том, что в "полосе Мёбиуса" возникновение индукционного тока в разы меньше в кольцевой полосе.

# Экспериментальные образцы для исследования гидродинамических характеристик полосы Мёбиуса



## Исследования энергетических затрат на смешение сред "полосой Мёбиуса" и стандартным смесителем

- Экспериментальным путём проведены сравнительные исследования энергетических затрат "полосы Мёбиуса" и стандартного смесителя одинаковых габаритных размеров.
- На основе экспериментальных исследований показано, что энергозатраты на смешивание до одинакового качества смешивания текучих сред отличаются так, что энергозатраты "полосы Мёбиуса" примерно на 20%-50% меньше, чем у соответствующего стандартного смесителя.

## **РАЗДЕЛ 4**

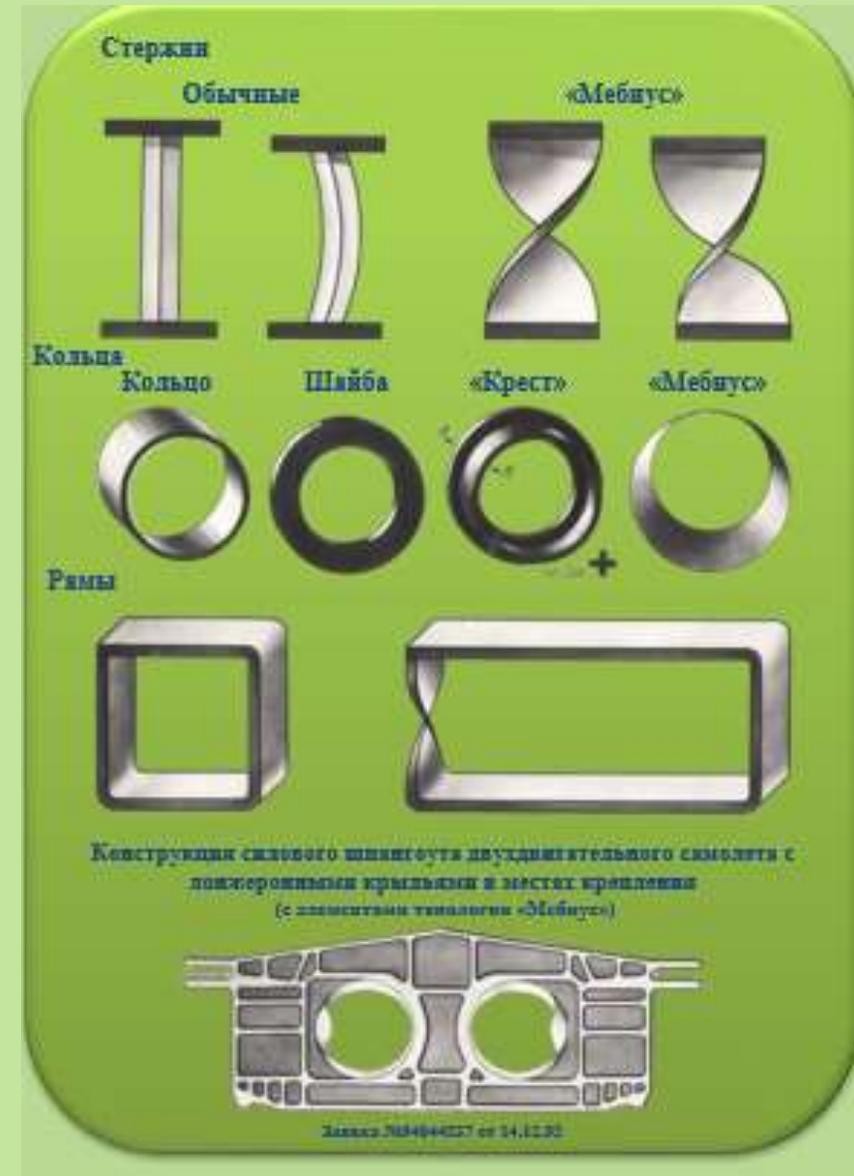
**Применение физических свойств  
листа Мёбиуса для создания  
новых устройств и технологий**

4.1. Применение физико-механических свойств  
листа Мёбиуса для проектирования силовых  
конструкций

# Традиционные и новые топологии силовых конструкций

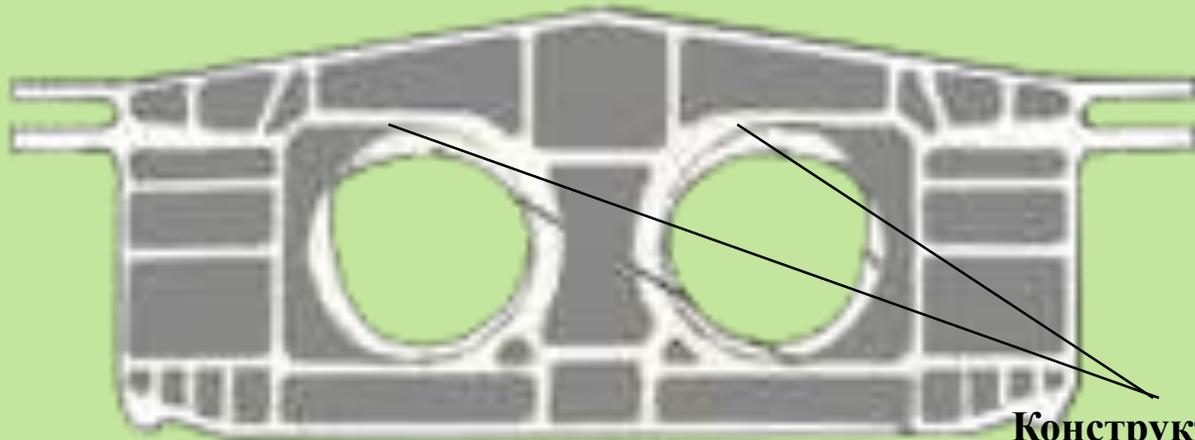
В исследованиях, связанных с поиском перспективных конструктивно-силовых схем авиационных конструкций, традиционно используются конструкции без предварительного напряжения. В таких конструкциях, где зоны разного типа деформаций (нормальных и касательных) разделены, характеристики прочности, жесткости и устойчивости определяются количеством силового материала в каждой из этих зон по отдельности. При этом внешнее силовое воздействие воспринимается силовым набором, в элементах которого деформации одного типа не переходят в другой.

Суть предлагаемого в данном проекте способа повышения прочностных и жесткостных характеристик, характеристик устойчивости заключается в использовании в силовых конструкциях элементов типа листа Мебиуса с предварительно созданным напряженно-деформированным состоянием или без него. В таких элементах зоны нормальных и касательных напряжений объединены так, что при приложении нагрузки один вид деформации (изгиб) «переходит» в другой (кручение). В этом случае внешнее силовое воздействие воспринимается конструкцией более эффективно (в работу включается весь материал, эпюры напряжений более равномерны), что приводит к повышению прочности, жесткости и характеристик устойчивости при сохранении веса силовой конструкции или к снижению веса конструкции при заданных требованиях к прочности (материалосберегающая конструкция).

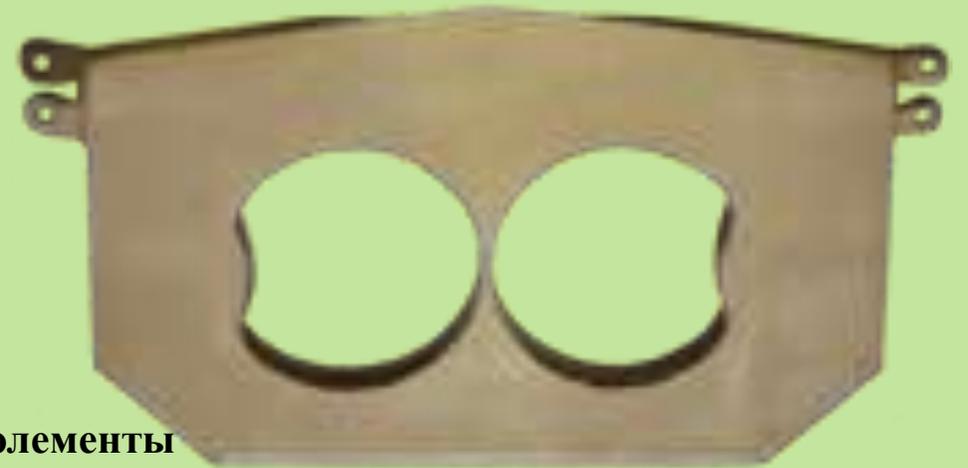


# Применение силовых конструкций "полосы Мёбиуса" в авиастроении

Предварительные расчетно-экспериментальные исследования показали, что применение элементов «односторонней топологии» (стержней, колец, рам) в силовых конструкциях позволяет практически удвоить их жесткость при сохранении массы или на 50% снизить массу силовых элементов при сохранении заданной жесткости. Для примера приведена конструкция силового шпангоута для двухдвигательного самолета, который включает в себя силовые элементы (кольца) в виде листа Мебиуса.



Конструктивные элементы  
«односторонней  
топологии»



**Конструкции силового шпангоута самолета с силовыми элементами типа листа Мебиуса**

## 4.2. Применение электромагнитных свойств листа Мёбиуса для проектирования электротехнических устройств

# Новые топологии: Магнитопровод

В основу данной разработки положены элементы, имеющие нетрадиционную одностороннюю поверхность (типа листа Мебиуса).

Конструкторское различие изготовленных образцов заключается в том, что в тороидальном сердечнике начало ленты сердечника находится внутри, а конец снаружи, в то время как у сердечника намотанного по Мебиусу начало ленты сердечника находится в середине магнитопровода, и при дальнейшей намотке ложиться то снаружи, то внутри относительно своего начала.



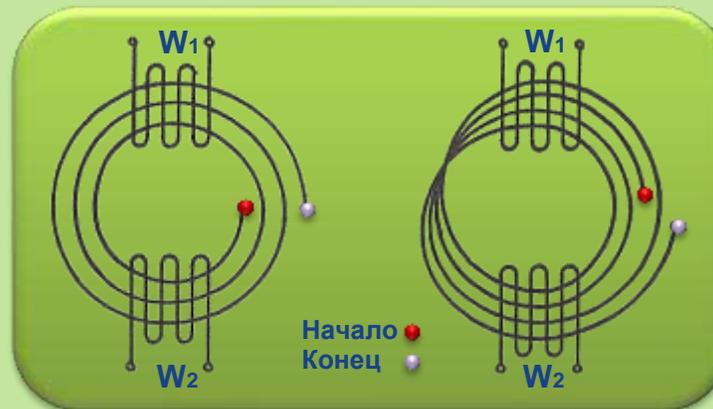
Тороидальный  
(классический)



Многokrатные кольца  
Мебиуса



Топология Лист Мебиуса (Спин +1) и (Спин -1)



Конструктивная схема

# Новые топологии: Обмотка

Исследования влияния на индуктивное сопротивление соленоида (X) обмотки, намотанной в виде кольца Мебиуса (М.О.), в сравнении с индуктивным сопротивлением соленоида, обмотка которого выполнена в виде обычной кольцевой намотки(С.О.). при различных «спинах» обмотки и магнитопровода.



Новая топология обмотки

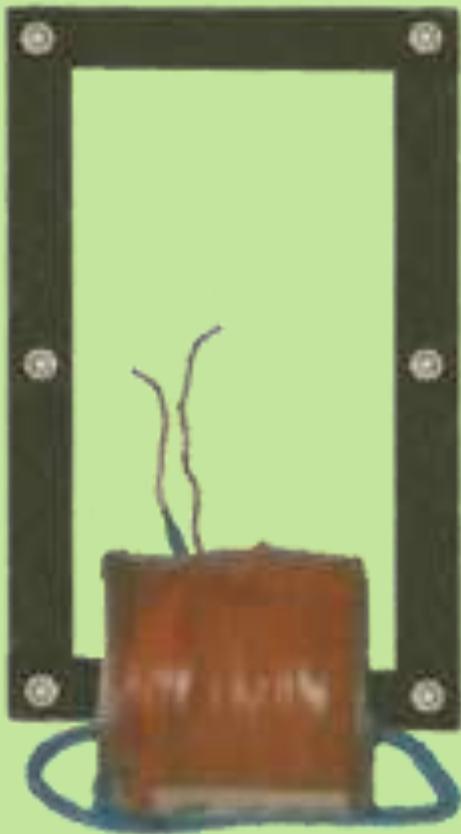


Обмотка в виде кольца Мебиуса (спин +1)

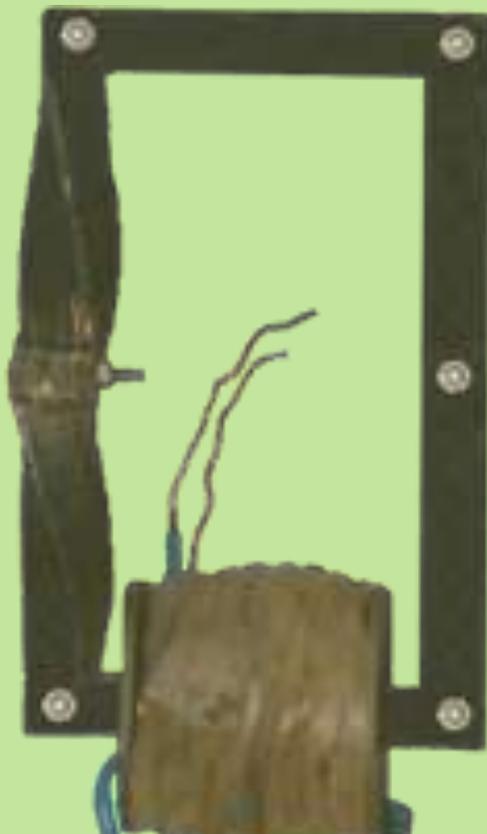


Обмотка в виде кольца Мебиуса (спин -1)

# Применение электромагнитofизических свойств "полосы Мёбиуса" в электротехнике



Стандартный стержневой магнитопровод



Стержневой магнитопровод с топологией лист Мебиуса



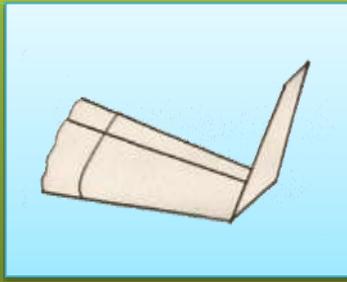
Стержневой двухкатушечный магнитопровод с топологией лист Мебиуса

4.3. Применение аэродинамических свойств  
листа Мёбиуса для проектирования  
аэродинамических устройств

# Определение рациональных типов и параметров законцовок

## Исследуемые классы конечных поверхностей

Традиционная форма



Спиройды



Концевые поверхности  
односторонней топологии



Концевые поверхности с  
вихрегенератором типа «Зуб»



## Исследуемые параметры

1. Угол отгиба (в т.ч. «вверх-вниз»)
2. Стреловидность (в т.ч. «прямая-обратная»)
3. Крутка
4. Размеры

## Исследуемые характеристики

1. Аэродинамические
2. Прочностные и весовые
3. Характеристики аэроупругости
4. Характеристики устойчивости-управляемости
5. Технологические
6. Лётно-технические характеристики
7. Стоимостные

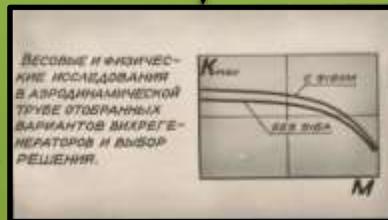
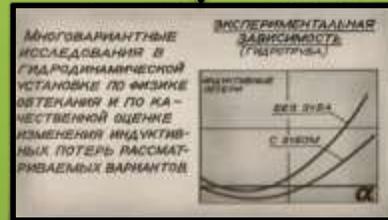
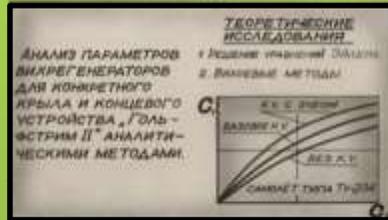
## Применяемые методы

1. Теоретические
  - (а) Аэродинамика (вихревые, решение уравнения Эйлера)
  - (б) Прочность МКУ (метод конечного элемента)
2. Эксперимент
  - (а) Гидротруба
  - (б) Аэродинамическая труба
  - (в) Динамические подобные модели

# Использование вихрегенераторов на концевых устройствах крыла

## Постановка задачи

Выбор основных геометрических параметров вихрегенератора и его ориентации на концевом устройстве крыла самолета «Гольфстрим-II» для обеспечения максимального прироста аэродинамического качества на крейсерном режиме полета

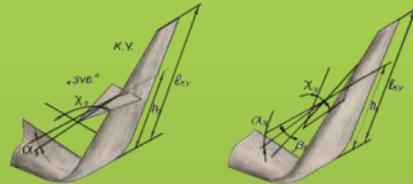


М  
е  
т  
о  
д  
о  
л  
о  
г  
и  
я  
р  
е  
ш  
е  
н  
и  
я  
з  
а  
д  
а  
ч  
и

## Вихрегенератор типа «Зуб»

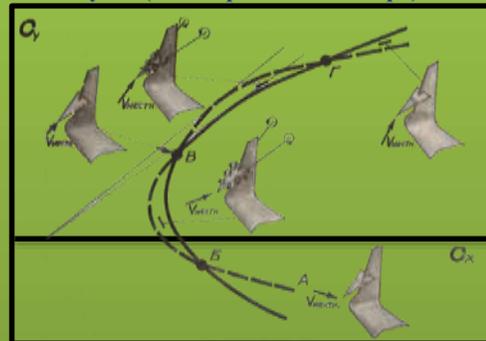
1. Достигнутый выигрыш по  $K_{max}$  от одного «зуба» на К.У. типа Ту-204-30% от эффекта,
2. Возможна комбинация «зубьев» и увеличение суммарного эффекта.
3. Строгая настройка на режим.
4. Минимальные доработки К.У.

### Параметры установки «Зуба»



- $\alpha_0$  — угол установки «зуба» в вертикальной плоскости.
- $\beta_0$  — угол установки «зуба» в горизонтальной плоскости.
- $\chi_0$  — угол стреловидности «зуба».
- $h_0 = h_1/b_1$  — параметр установки «зуба» по высоте К.У.
- $S_0 = S_1/S_{KV}$  — параметр размерности «зуба».

### Особенности воздействия вихрегенератора типа «Зуба» (неквадратичная поляра)



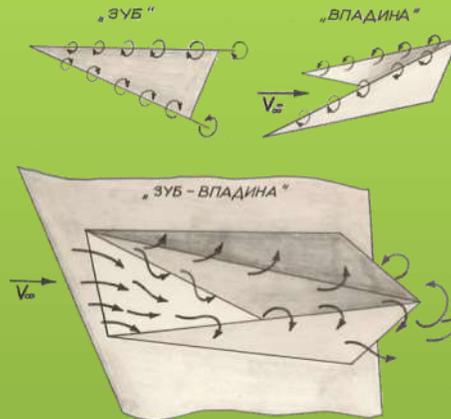
РАСПОЛОЖЕНИЕ ВЫДЕЛЕННЫХ ЗОН ПО  $C_y$  ЗАВИСИТ ОТ:

1. ГЕОМЕТРИИ ИСХОДНОГО КРЫЛА И К.У.;
2. РЕЖИМА ОБТЕКАНИЯ ( $\alpha$  и  $M$ );
3. ПАРАМЕТРОВ «ЗУБА» И ЕГО ОРИЕНТАЦИИ.

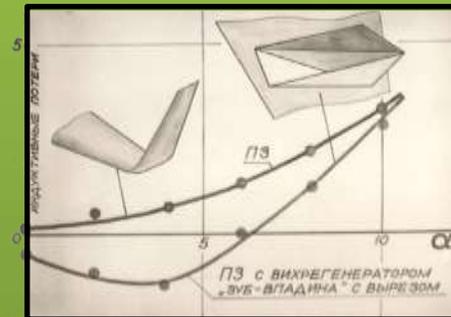
## Вихрегенератор типа «Зуб-впадина»

1. Самонастраиваемая система (лоялен к режиму по углу  $\alpha$ ).
2. Существенные доработки самого К.У. (Перепускное окно)

### Схема визуализаций



### Эффективность вихрегенератора типа «Зуб-впадина» (гидротруба)





4.4. Применение аэродинамических свойств  
листа Мёбиуса для проектирования  
смесительных устройств

# Применение гидродинамических свойств "полосы Мёбиуса" в промышленных смесителях



# Характеристика промышленных смесителей

N	Рабочий орган	Качество смешивания		Скорость вращения	Энергетика	
		Колич оценка С	Качест оценка		М [кг*м]	W [Вт]
1	Турбина Раштона (базовая модель)	1	1	1	1	1
2	Мебиус - 0	0.36	3	1.78	0.40	0.63
3	Мебиус - 7	0.47	4	1.57	0.49	0.80
4	Турбина - S	0.43	5	1.03	0.53	0.55
5	Турбина – M2	0.40	4	1.28	0.41	0.54

# Раздел 5

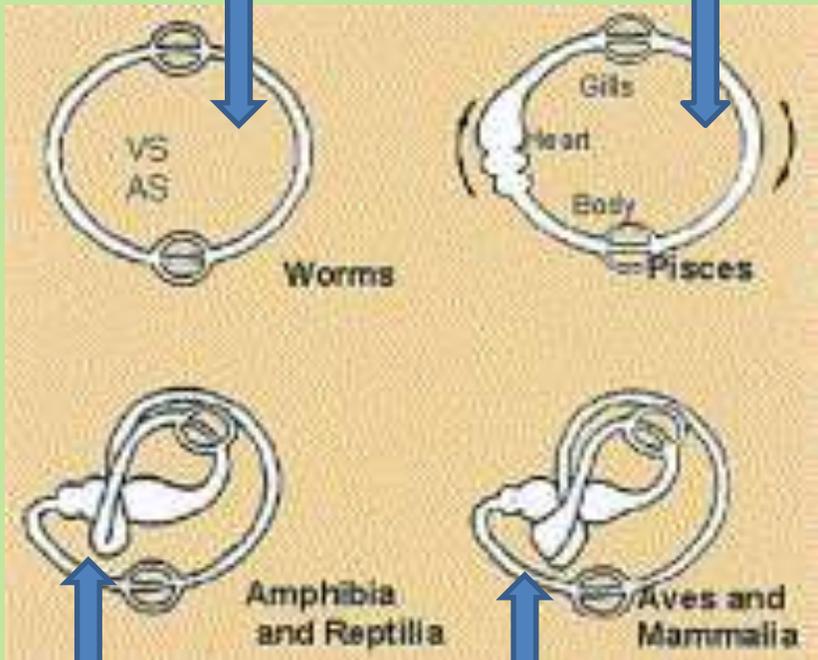
## Физиологические свойства листа Мёбиуса

Физиологическая модель  
сердечно-сосудистой системы

# Эволюция системы кровообращения животных от червей до млекопитающих

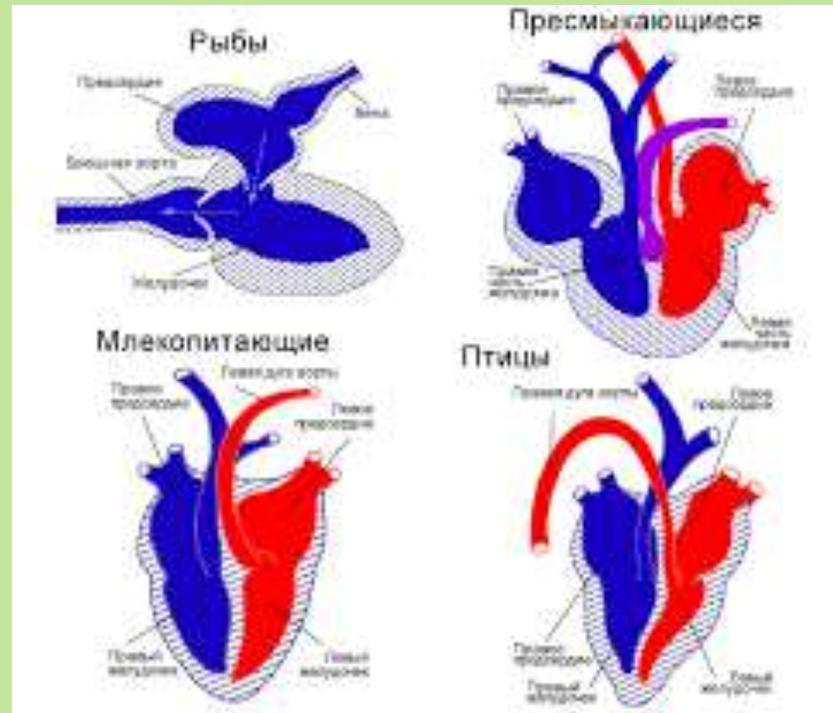
Строение системы кровообращения червя

Строение системы кровообращения рыбы



Строение системы кровообращения земноводных и пресмыкающихся

Строение системы кровообращения птиц и млекопитающих



# Heart as sheet convoluted in double spiral

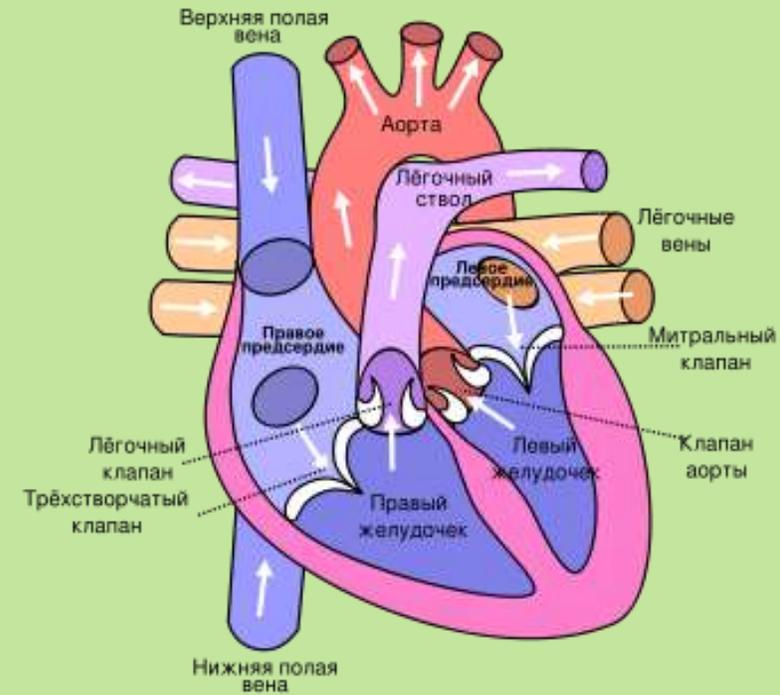


Gerald D. Buckberg



The heart is formed from flat sheet of myocardium convoluted in double spiral which generates conical cavities

## Complex system for 3D modeling



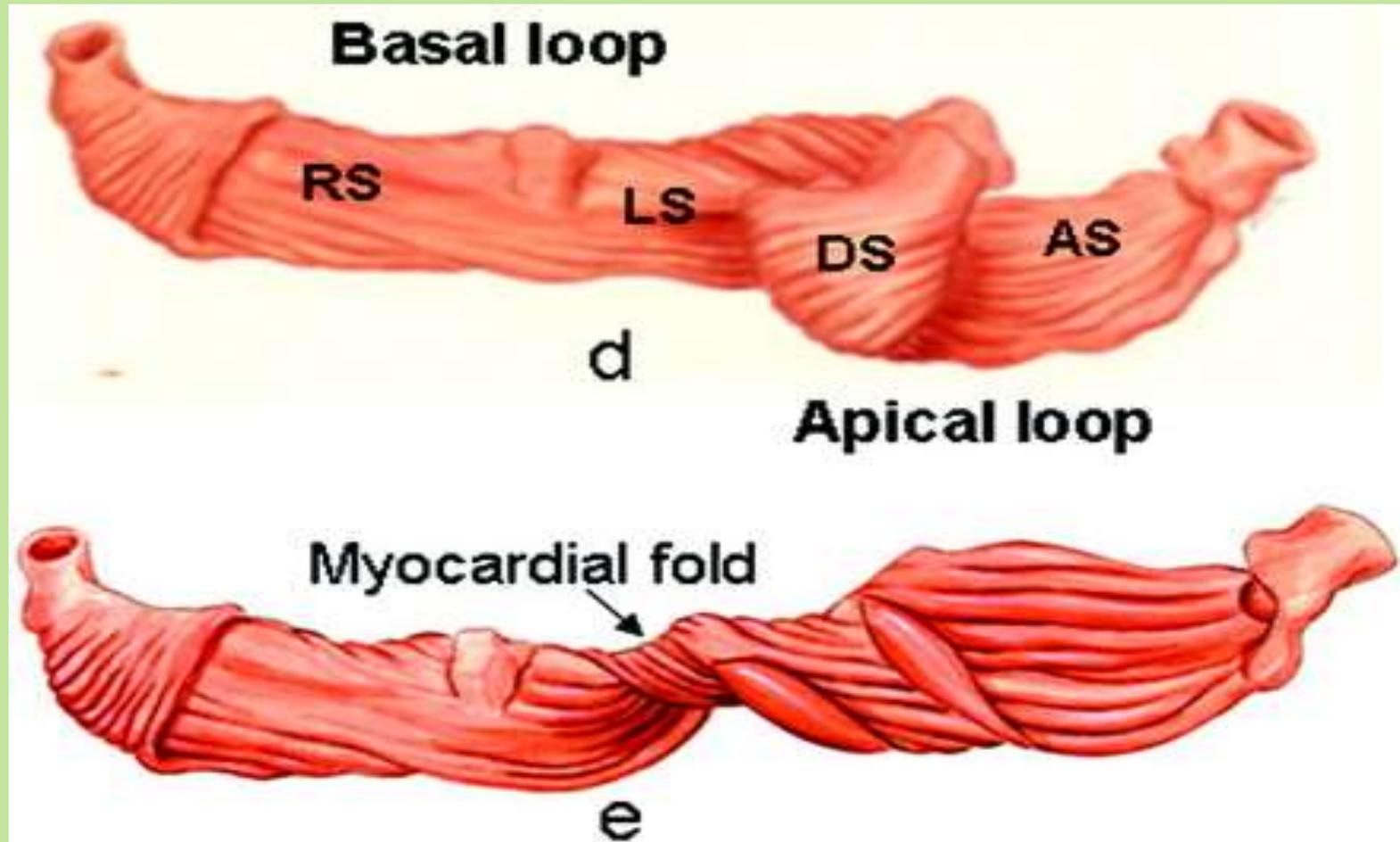
Problems to be solved:

Create hydrodynamic model

Create elastic-mechanical model

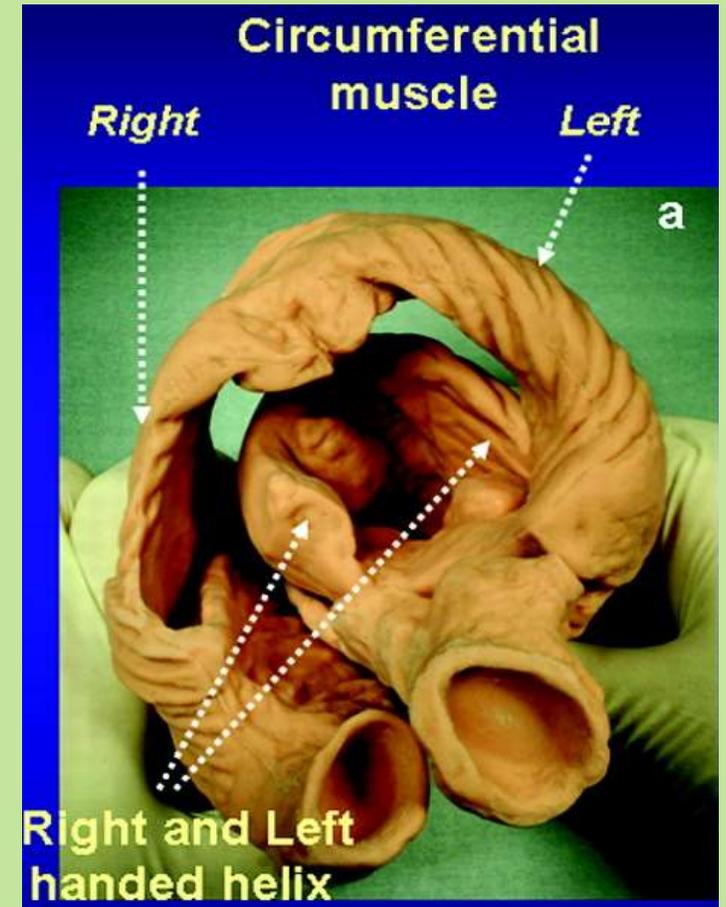
Interaction between the models

# Сегменты миокарда



# Сегменты миокарда

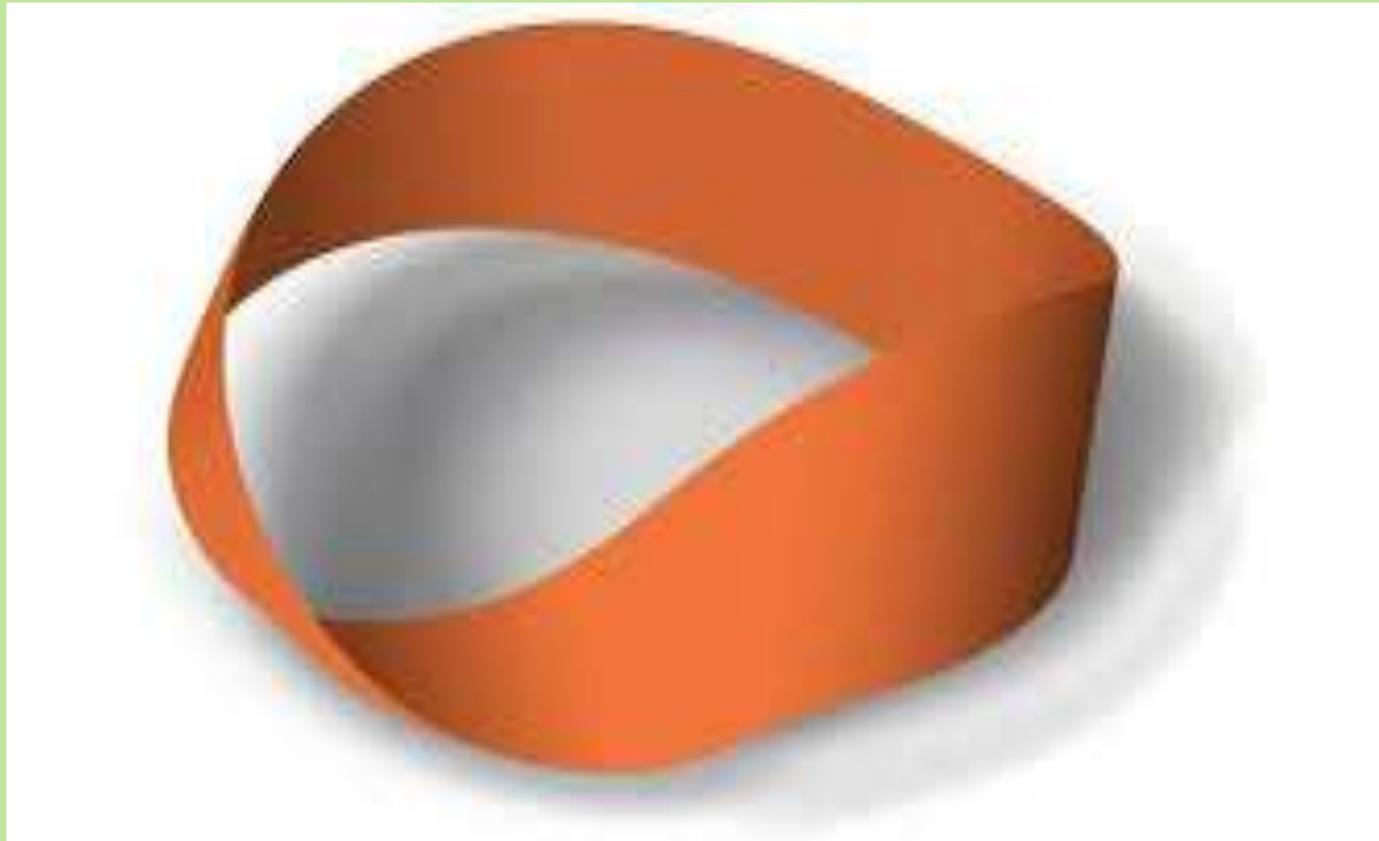
- правый сегмент базальной петли миокарда (Right);
- левый сегмент базальной петли миокарда (Left);
- нисходящий сегмент апикальной петли миокарда (Right handed helix)
- восходящий сегмент апикальной петли миокарда (Left handed helix)



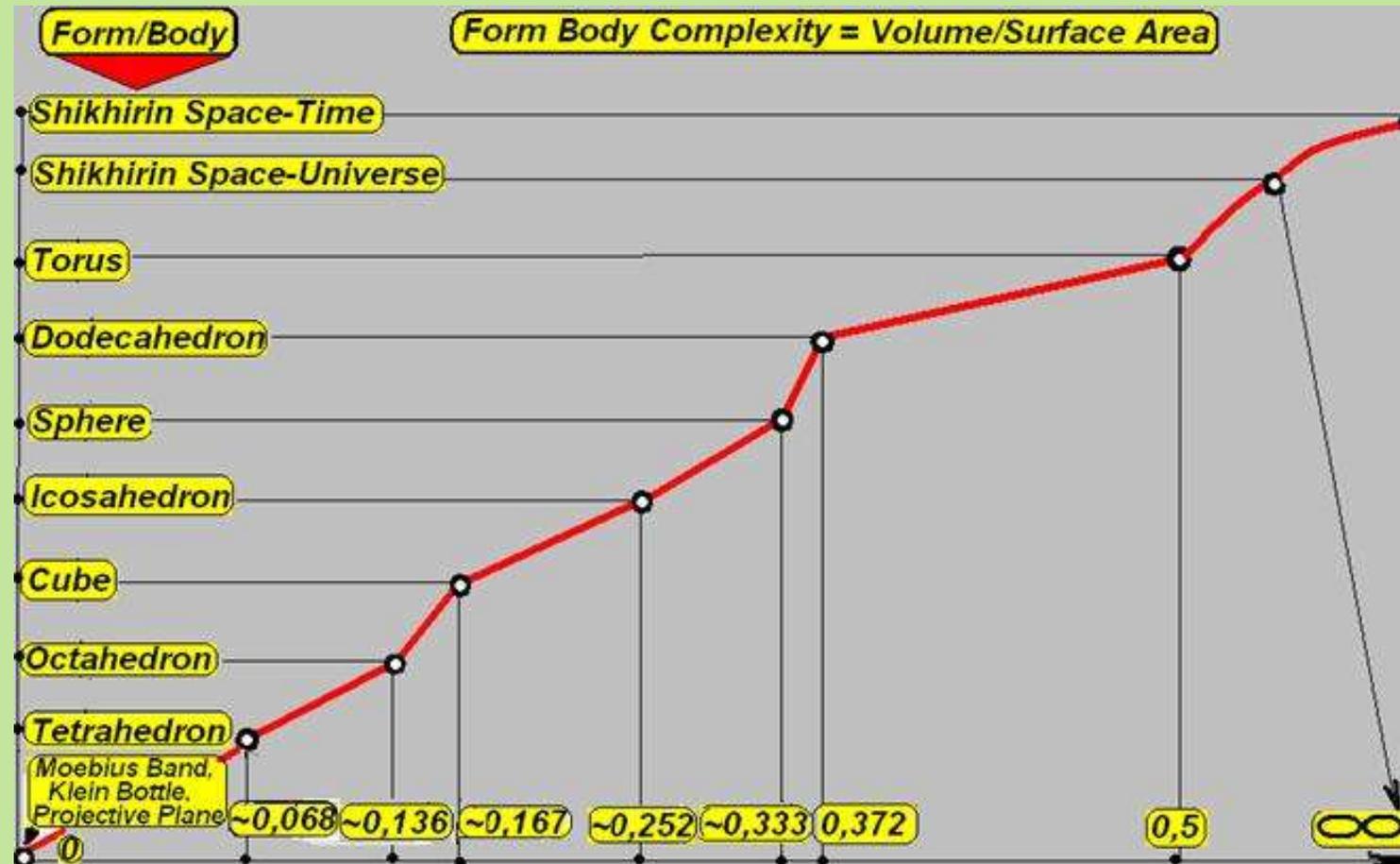
# Матрица взаимовлияния гемодинамических и физикомеханических характеристик

- RS давит на правый желудочек
- LS давит на левый желудочек
- DS укорачивает сердце (оба желудочка)
- AS расширяет сердце (оба желудочка)
- Стенка левого предсердия сжимает л.предсердие
- Стенка правого предсердия сжимает пр.предсердие

# Лист Мебиуса как модель миокарда сердца



# «Индекс массы тела» различных геометрических фигур и поверхностей



## Экспериментальная проверка гипотезы Мёбиусной модели физико-механических характеристик миокарда

- расчёт ЧСС в норме
- расчёт ЧСС “утолщённого и увеличенного в габаритах миокарда” (уменьшение ЧСС)
- расчёт ЧСС миокарда “с патологией” (кольцеобразное расположение волокон и изменение эластичности(сократимости)стенок миокарда)(увеличение ЧСС)

## Экспериментальные модели физико-механических характеристик миокарда (моделирование «нормы»)



## Экспериментальные модели физико-механических характеристик миокарда (моделирование «патологии»)



# Экспериментальные исследования физико-механических характеристик модели миокарда новой анатомии (моделирование ЧСС)

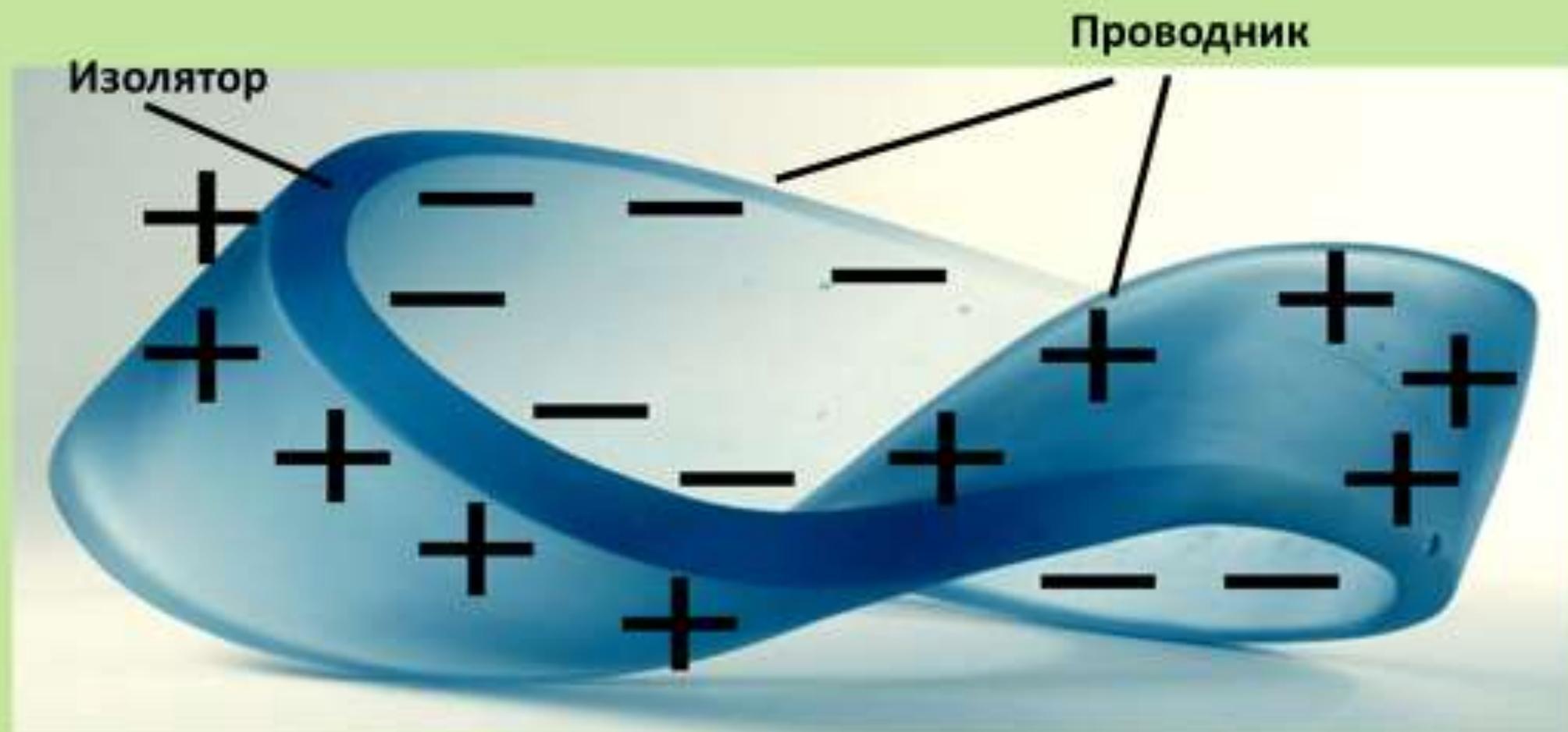
Норма	Брадикардия	Тахикардия
<ul style="list-style-type: none"><li>• ЧСС = 60 уд/мин</li></ul> A) <ul style="list-style-type: none"><li>• Норма анатомии</li><li>• Норма морфологии</li></ul> B) <ul style="list-style-type: none"><li>• Норма толщины</li><li>• Норма габарит</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>• ЧСС &lt; 60 уд/мин</li></ul> A) <ul style="list-style-type: none"><li>• Увеличение толщины (патолог)</li><li>• Увеличение габарит (патология)</li></ul> B) <ul style="list-style-type: none"><li>• Норма анатомии</li><li>• Норма морфологии</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>• ЧСС &gt; 60 уд/мин</li></ul> A) <ul style="list-style-type: none"><li>• норма толщины</li><li>• норма габарит</li></ul> B) <ul style="list-style-type: none"><li>• Патология анатомии (миокард как кольцо)</li><li>• Патология морфологии (некроз миокарда)</li></ul>

Совместное взаимодействие факторов, влияющих на ЧСС

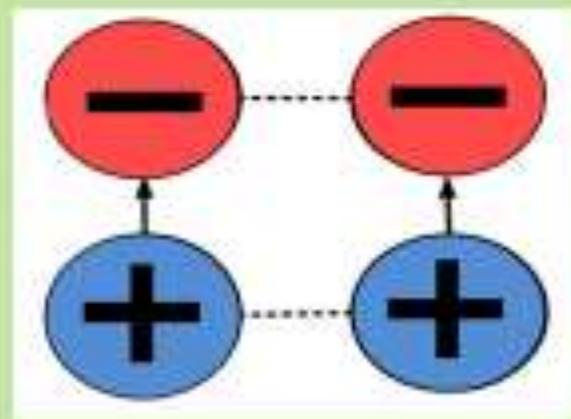
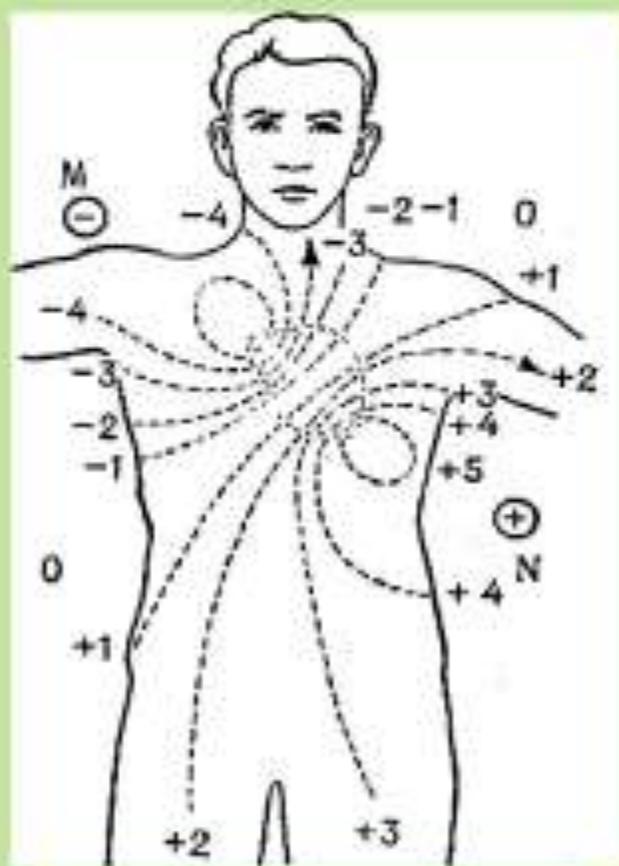
# Функционирование синусового узла и пучка Гисса



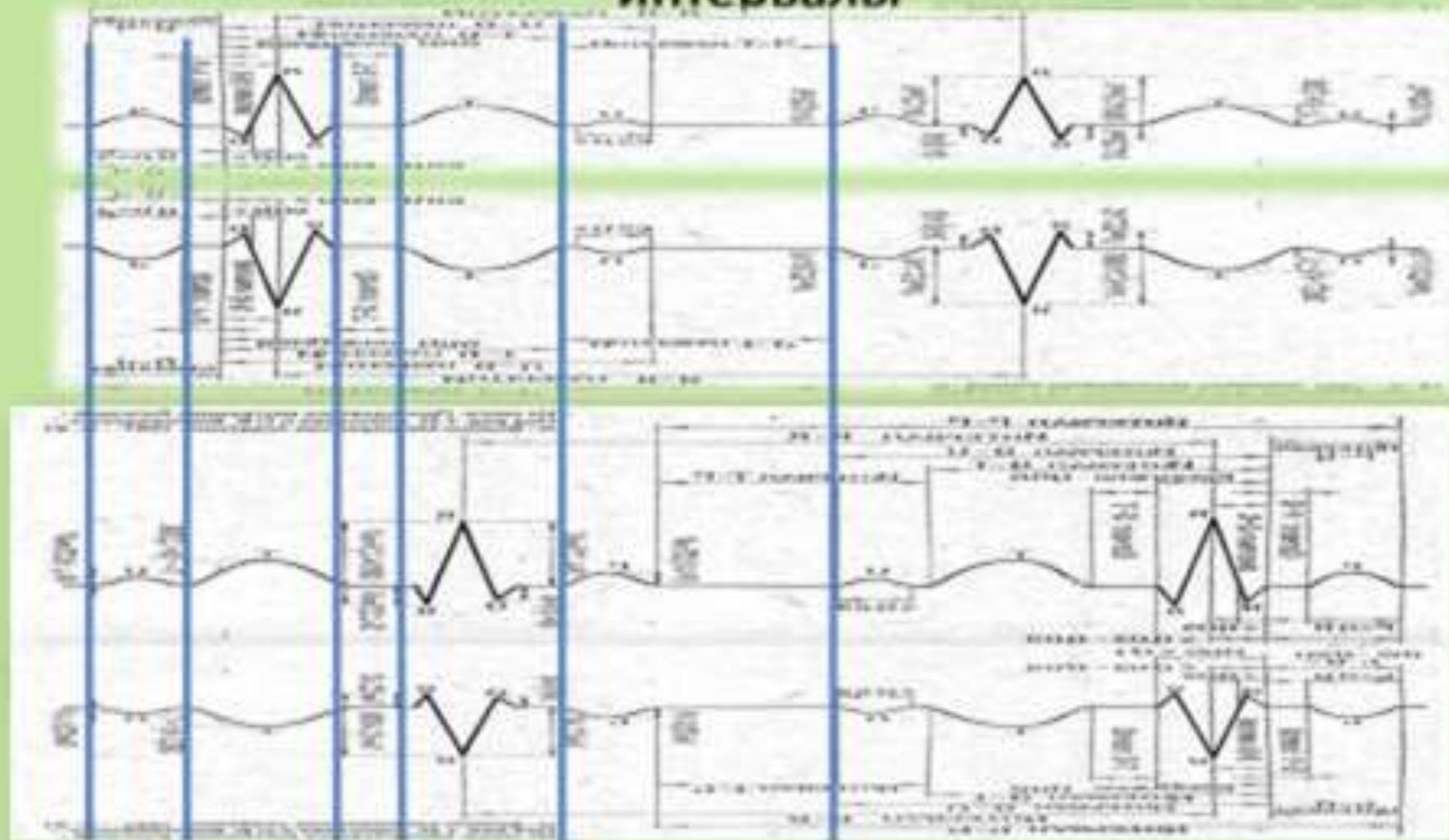
# Модельное представление электрофизиологии скрученного миокарда



# Электрофизическое моделирование скрученного миокарда: модель скрученного электрического квадруполья



# Приведение "матрицы" стандартной и дополнительных ЭКГ к системе линейных уравнений: временные интервалы



## **РАЗДЕЛ 6**

**Применение физиологических свойств  
листа Мёбиуса для моделирования  
внезапной сердечной смерти(ВСС)**

## Текущее состояние дел по проблеме ВСС в спорте



# Мониторирование сердечного ритма во время эпизода ВСС

- ЖТ трансформируется в ФЖ в течение 30 сек -3 мин
- Через 4 мин клинической смерти - ФЖ идентифицирована у 90 %, асистолия - у 10%
- При более длительной регистрации - асистолия и ЭМД идентифицируются у 60 %

6:02 AM



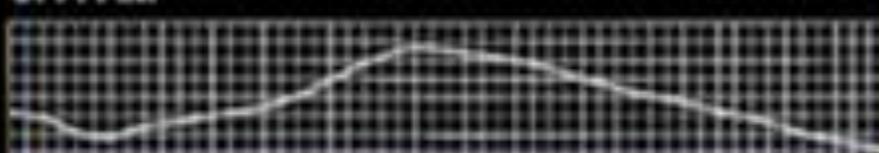
6:05 AM



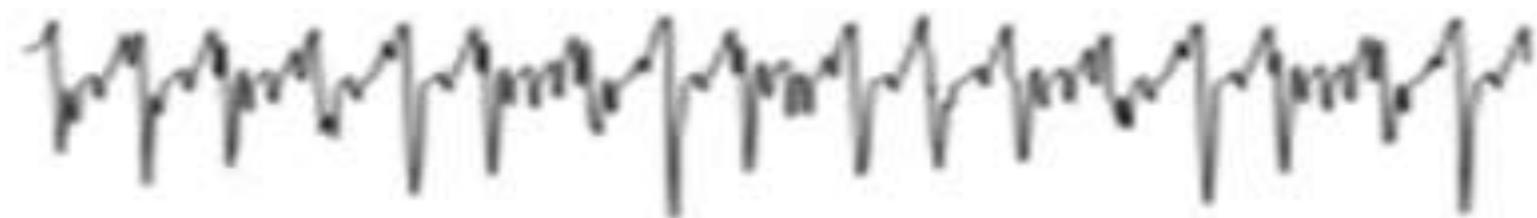
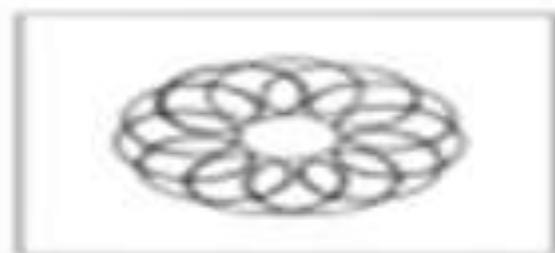
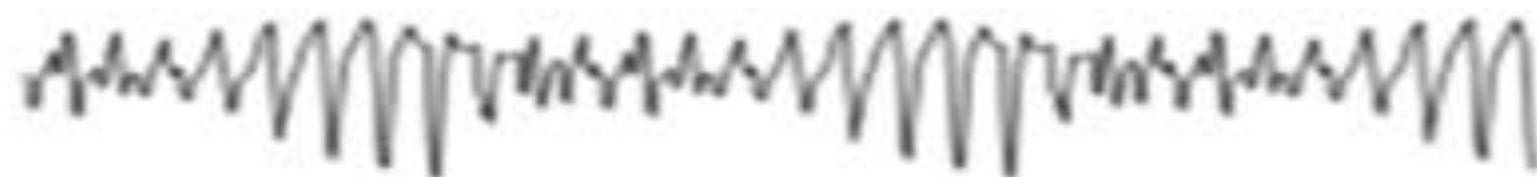
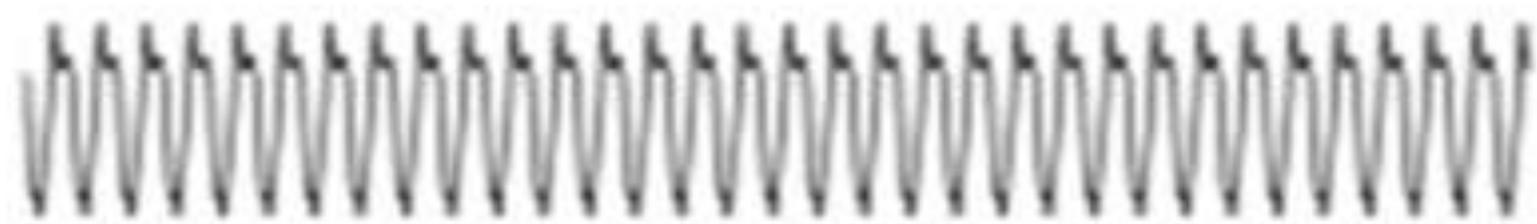
6:07 AM



6:11 AM



# Аритмия и хаос в основе ВСС

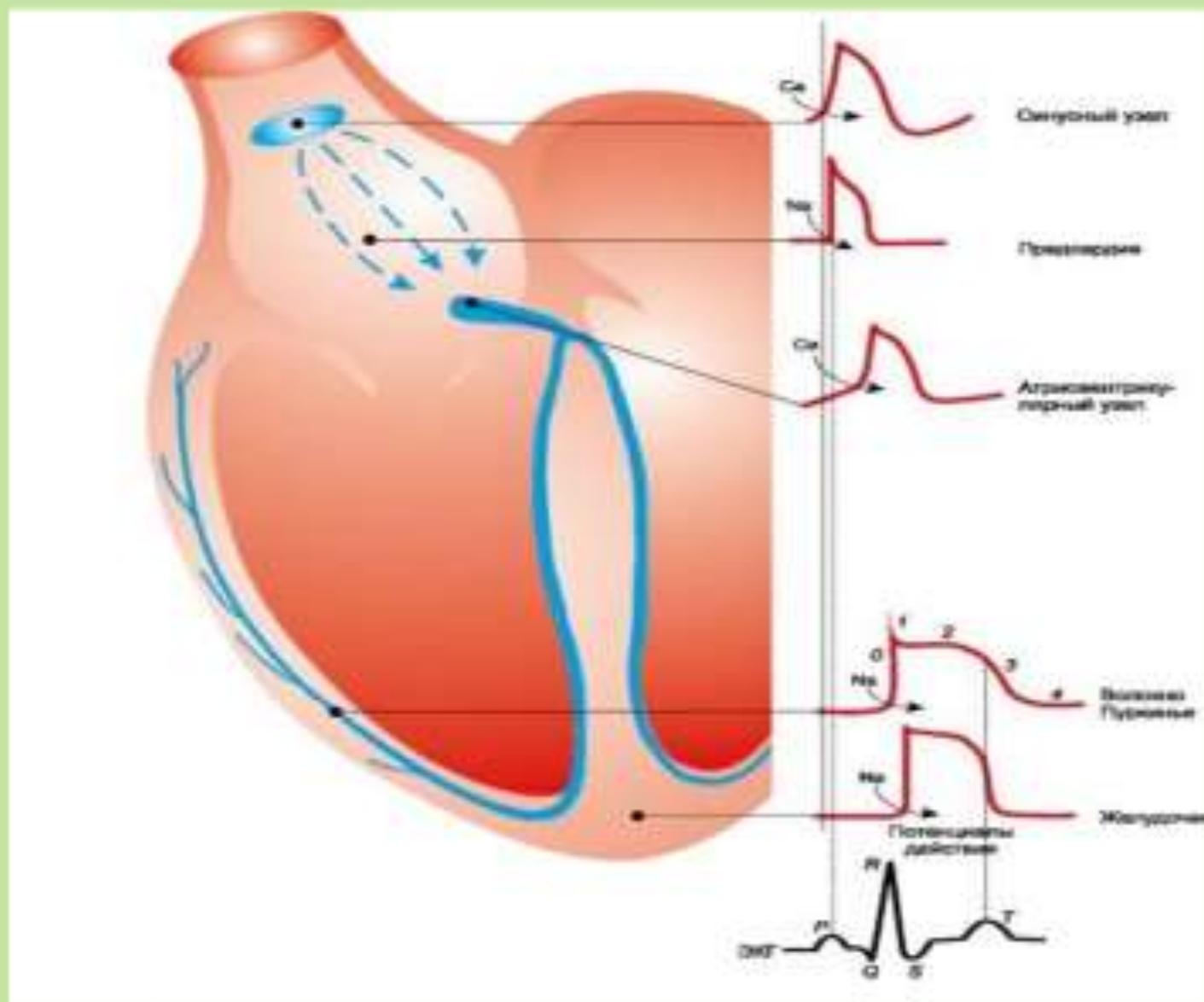


псевдо-электрокардиограмма

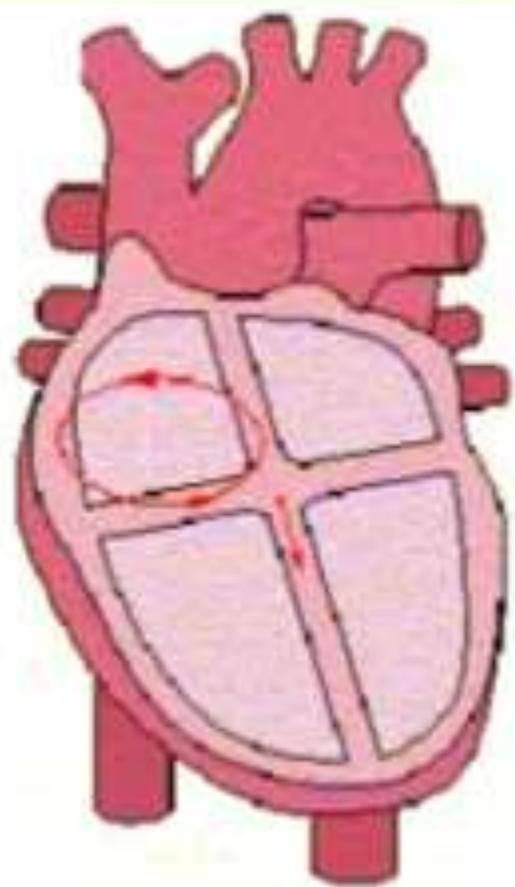
траектория кончика ревербератора

**Рис. 2.3. Классические типы эволюции ревербератора. На врезке – вид ЭКГ при разных типах эволюции ревербератора: круговой циркуляции (вверху), меандре (посередине) и гипермеандре (внизу)**

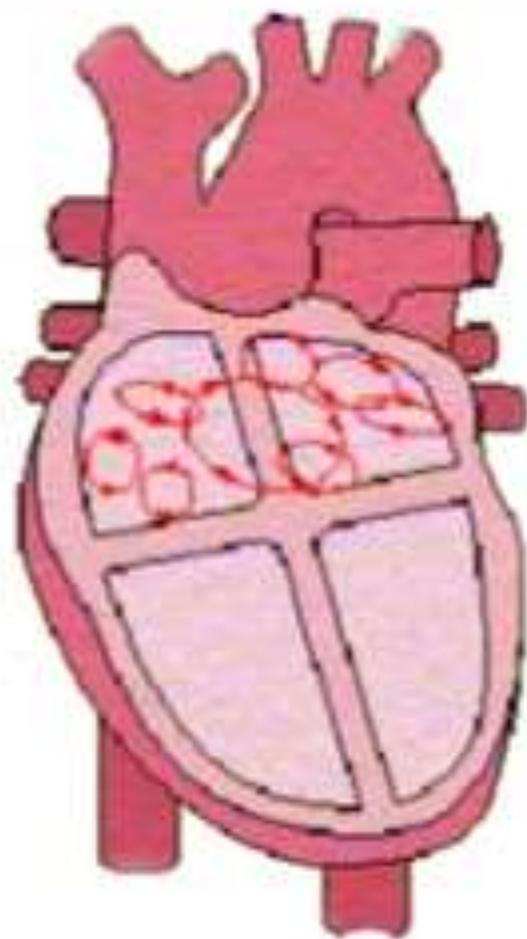
# Функционирование электропроводящей системы сердца



## Виды re-entry в сердце



macro-re-entry



micro-re-entry

# Автоволновая природа аритмологических патологий



двумерная  
круговая циркуляция

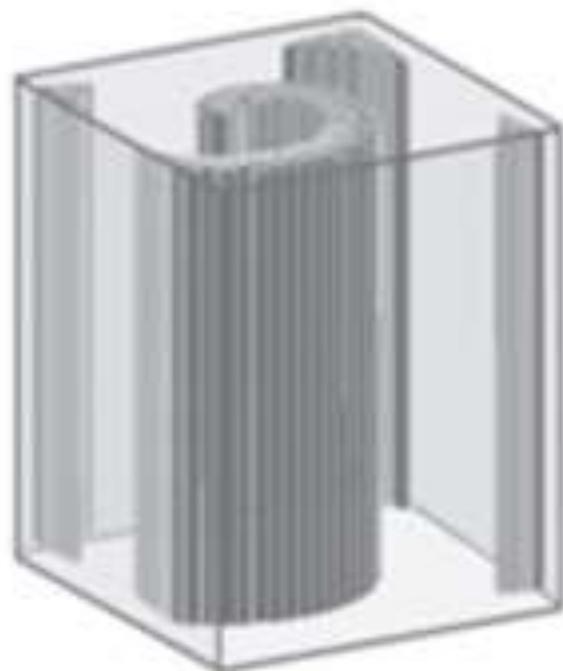


меандр по типу  
эпикардиоиды

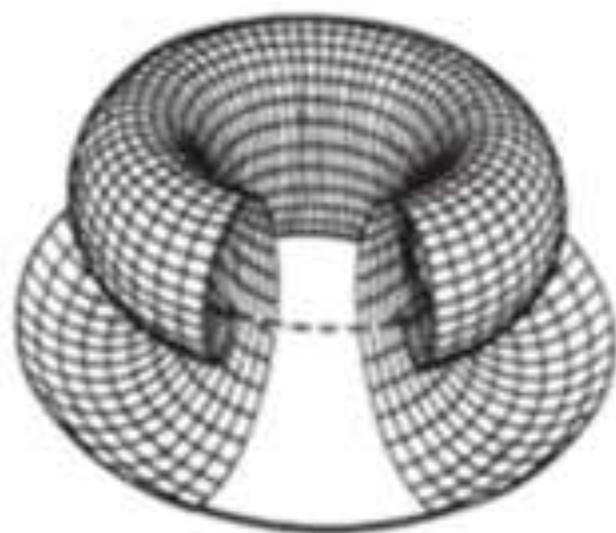


меандр с линейным  
ядром

# Автоволновая природа аритмологических патологий: пример 3D вихрей



Панель А



Панель Б

Рис. 2.8. Примеры автоволновых 3D-вихрей. Панель А - вихревой цилиндр (по А.В. Русаков и др., 2011). Панель Б - вихревое кольцо (по А. Вайльбу, 1984)

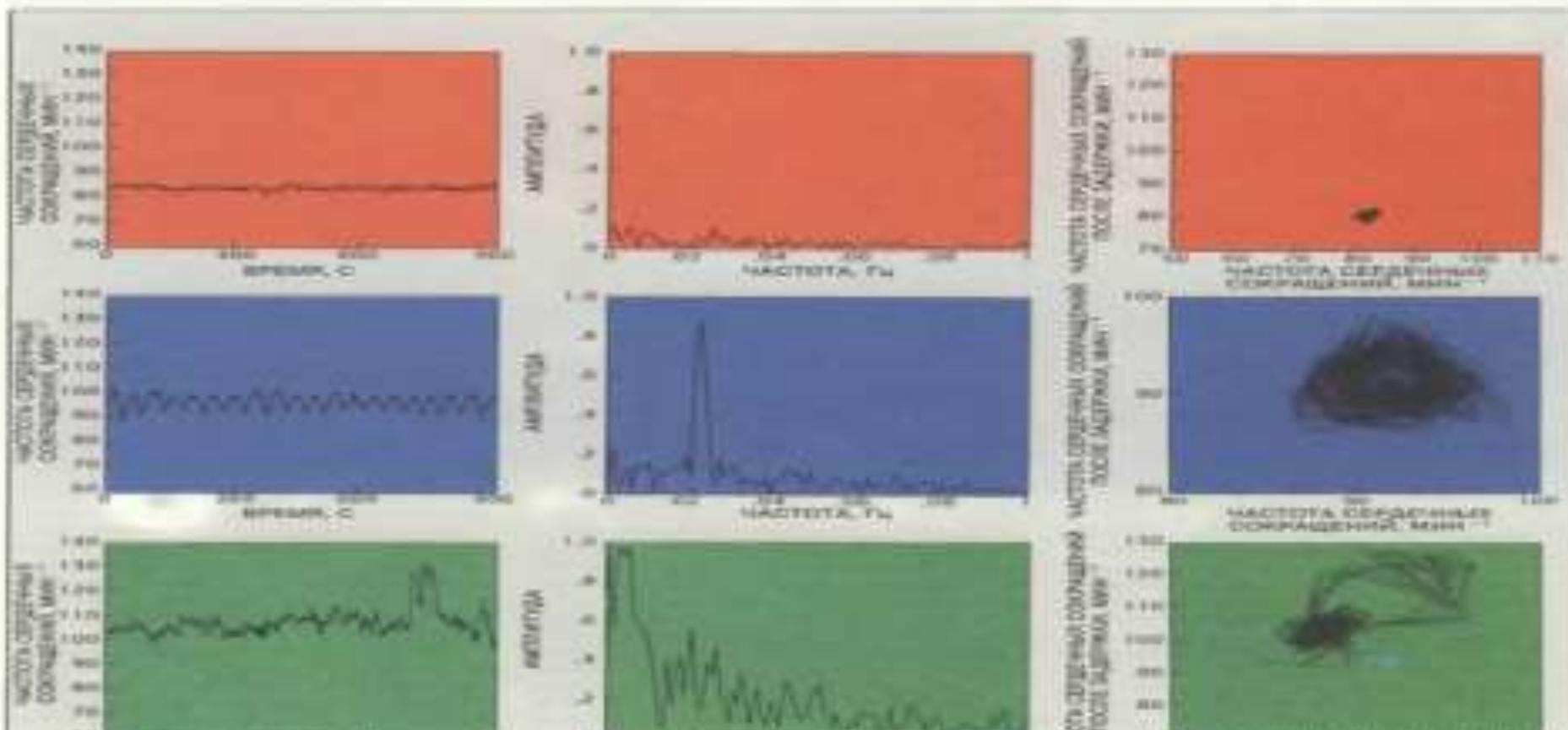
# Хаос в сердечном ритме

исходного графика, отстоявшегося во время длительного непрерывного времени. В наш более сложный временной масштаб (минуты) можно обнаружить уже более быстрые флуктуации, которые опять-таки неслучайно флуктуируют на меньшем графике. Флуктуации ритма в различных масштабах времени могут быть рассмотрены с помощью тугого твоего, как можно увидеть, рисованного фрактала. Это наблюдение свидетельствует о том, что хаотичность, отражающаяся в сердечном ритме, по сути своей может быть хаотической. Другими словами, частота сердечная

состоянием, вместо того чтобы стремиться к гомеостатической стабильной величине, может подвергаться значительным флуктуациям даже в отсутствие флуктуирующей во внешних стимулов.

Чтобы выяснить, являются ли вариации частоты сердечными составляющими хаотическими или периодическими, нужно вычислить спектр Фурье по временному графику сигнала. Спектр Фурье любой сложной функции  $f(x)$  частоты, графики на различных масштабах масштабы

обнаружить присутствие периодической компоненты. Если, например, график показывает ритм, в точности равный своему значению в секунду, то в спектре будет резкая пик на частоте, равной одному герцу. В то же время, график, отражающий хаотический характер сердечного ритма, порождает спектр, который либо покажет широкие пики, либо вообще отсутствие ярко выраженных линий. Спектральный анализ информационных вариаций частоты сердечных сокращений не сможет обнаружить широкий спектр, свидетельствующий о хаосе.



А.В. Ардашев, А.Ю. Лоскутов

**ПРАКТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ  
современных методов анализа  
вариабельности сердечного ритма**



являются *аттракторами* (буквально – “притягателями”), поскольку в прямом смысле они притягивают все близкие траектории. Физически это означает, что при отклонении от таких колебаний (вследствие каких-либо воздействий) система спустя некоторое время вновь возвращается к ним, т.е. такое движение как бы притягивает. Простым примером здесь может служить обычный часовой маятник.

Если диссипативная система проявляет хаотические свойства, то математически это соответствует наличию в ее фазовом пространстве *странного* (иногда говорят *хаотического*) *аттрактора*. Данное понятие впервые было введено в известной работе Д. Ритца и Ф. Тахена “О природе турбулентности” в 1971 г. Появление такого подмножества в системах тогда казалось экзотичной, отсюда и название – *странные* аттракторы (подробнее см. учебник [75]).

#### 4.3. Хаос и сердечные аритмии

Сердечная мышца относится к так называемым возбудимым системам. Распространение волн в таких системах осуществляется посредством источника энергии, распределенного в ней. При подаче импульса в такую систему от места его приложения начинает распространяться возмущение – волна возбуждения; поступивший импульс, не гасулая, последовательно передается от элемента к элементу. Обычно после возбуждения каждый элемент не способен сразу же возбудиться вновь. Как правило, существует определенное “время релаксации”, называемое периодом рефрактерности, во время которого элемент как бы восстанавливается. Это приводит, с одной стороны, к упорядоченному пространственному распространению волны возбуждения, а с другой стороны, при частой подаче импульсов (или при большом периоде рефрактерности) часть из них окажется заблокированной.

прост и глупые против явил в состоянии покоя. Таким образом, переход в возбужденное состояние оказывается возможным лишь из состояния покоя. Хотя такая модель является определенным приближением, она очень хорошо воспроизводит основные явления в возбудимых средах, в том числе и в тканях сердца.

Предположим, что имеется однородная возбудимая среда, в которой все элементы обладают идентичными свойствами. Тогда частота возбуждения таких элементов будет одинаковой. Если некоторую область такой среды начать периодически возмущать, то в этой области возникнет источник концентрически расходящихся волн возбуждения. Такой источник называют *волнующим центром* или *пейсмекером* (рис. 4.1).

Если в возбудимой среде есть два или несколько пейсмекеров, то пейсмекер меньшей частоты генерации с течением времени подавляется пейсмекером большей частоты. Иными словами, имеет место *конкуренция пейсмекеров*. В идеальном случае через определенное время во всей среде останется только один пейсмекер.

В составе сердечной мышечной ткани выделяют несколько видов кардиомиоцитов, из которых ос-



Рис. 4.1. Ведущий центр, или пейсмекер, в возбудимой среде (подробнее см. учебник [75] и сборник трудов [155])

# Аттрактор Рёсслера — хаотический аттрактор, которым обладает система дифференциальных уравнений Рёсслера: $x, y, z$ - параметры электрокардиограмм

Аттрактор Рёсслера — хаотический аттрактор, которым обладает система дифференциальных уравнений Рёсслера<sup>[1]</sup>:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y - z \\ \frac{dy}{dt} = x + ay \\ \frac{dz}{dt} = b + z(x - c) \end{cases} ;$$

где  $a, b, c$  — положительные постоянные. При значениях параметров  $a = b = 0, 2$  и  $2, 6 \leq c \leq 4, 2$  уравнения Рёсслера обладают устойчивым предельным циклом. При этих значениях параметров период и форма предельного цикла совершают последовательность удвоения периода. Сразу же за точкой  $c = 4, 2$  возникает явление хаотического аттрактора. Чётко определённые линии предельных циклов расплываются и заполняют фазовое пространство бесконечным счетным множеством траекторий, обладающим свойствами фрактала.



Аттрактор Рёсслера

# Точки равновесия уравнения Рёsslера, определяющие критические параметры электрокардиограмм

## Точки равновесия [\[ править \]](#) [\[ править код \]](#)

Для того, чтобы найти точки равновесия, три уравнения Рёsslера приравниваются нулю и *xyz*-координаты каждой точки равновесия находятся путём решения полученных уравнений. В итоге:

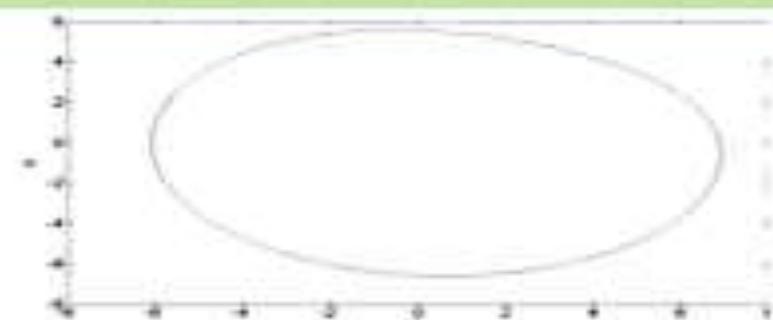
$$\begin{cases} x = \frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4ab}}{2} \\ y = - \left( \frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a} \right) \\ z = \frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a} \end{cases}$$

Как показано в общих уравнениях аттрактора Рёsslера, одна из этих неподвижных точек находится в центре аттрактора, а другие лежат сравнительно далеко от центра.

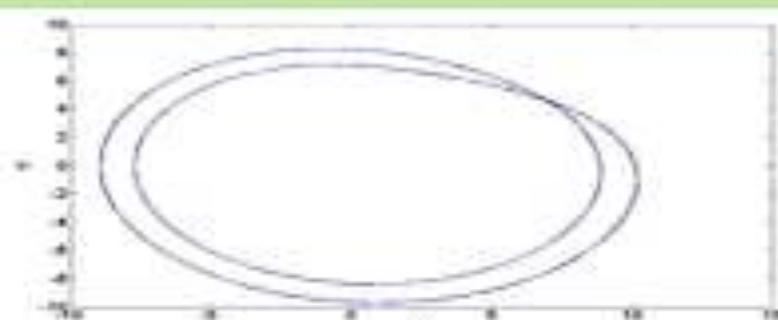
## Изменение параметров *a*, *b* и *c* [\[ править \]](#) [\[ править код \]](#)

Поведение аттрактора Рёsslера в значительной степени зависит от значений постоянных параметров. Изменение каждого параметра даёт определённый эффект, в результате чего система может сойтись к периодической орбите, к неподвижной точке или устремиться в бесконечность. Количество периодов аттрактора Рёsslера определяется числом его витков вокруг центральной точки, которые возникают перед серией петель.

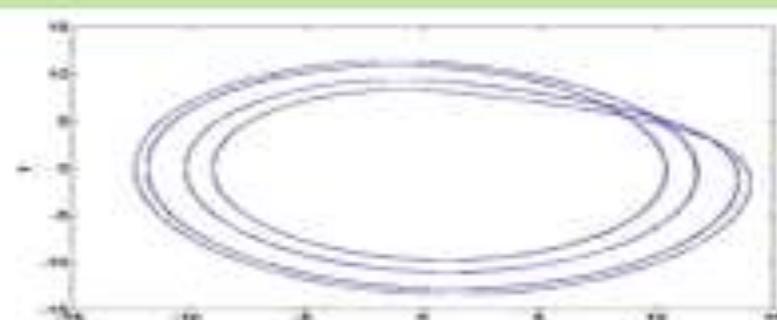
# «Странный» хаотический аттрактор Рёсслера: формирование предельного цикла



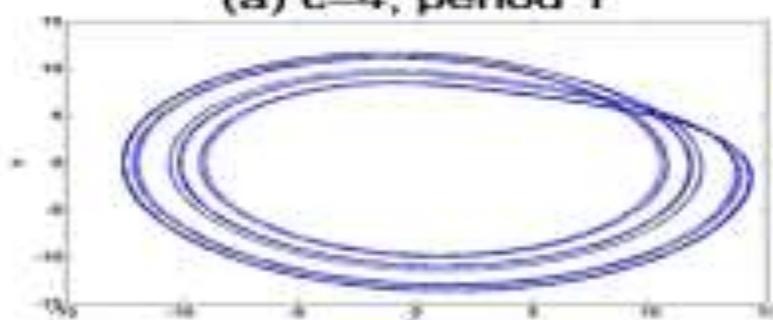
(a)  $c=4$ , period 1



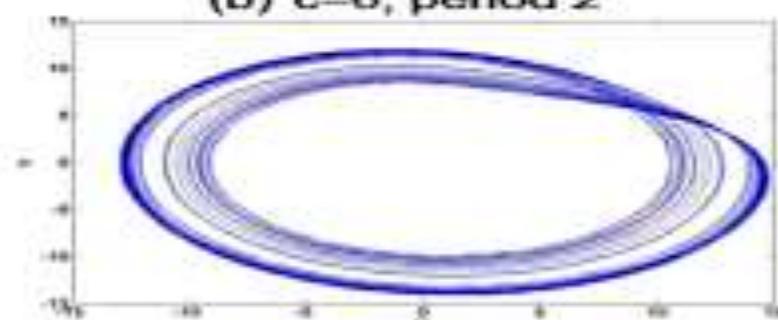
(b)  $c=6$ , period 2



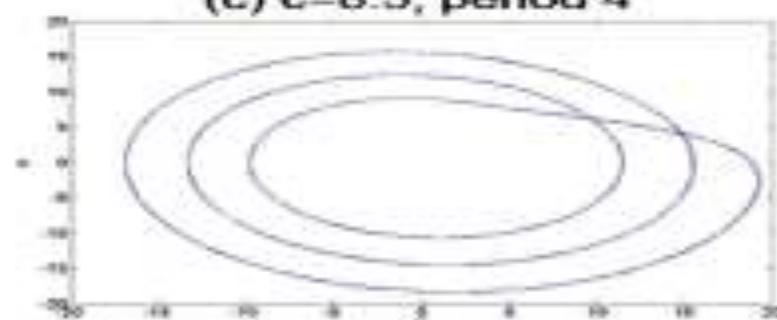
(c)  $c=8.5$ , period 4



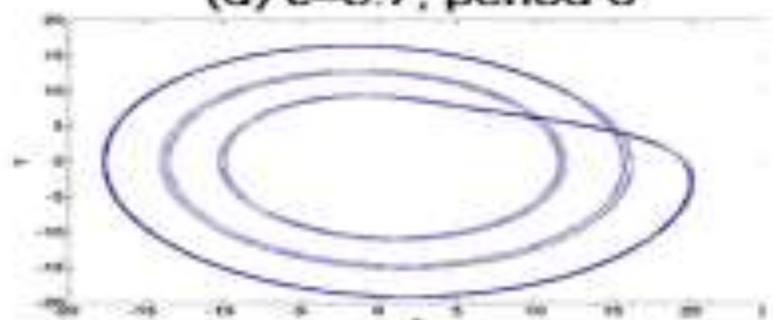
(d)  $c=8.7$ , period 8



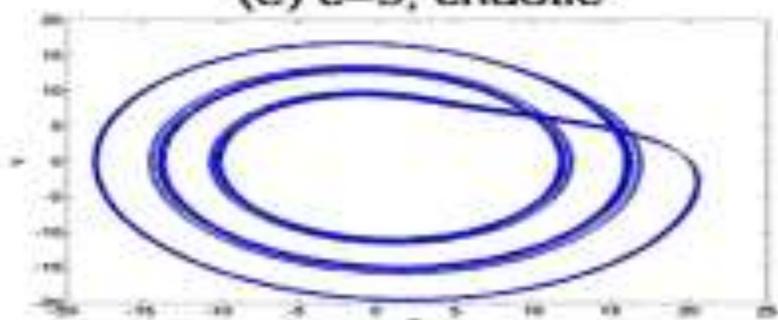
(e)  $c=9$ , chaotic



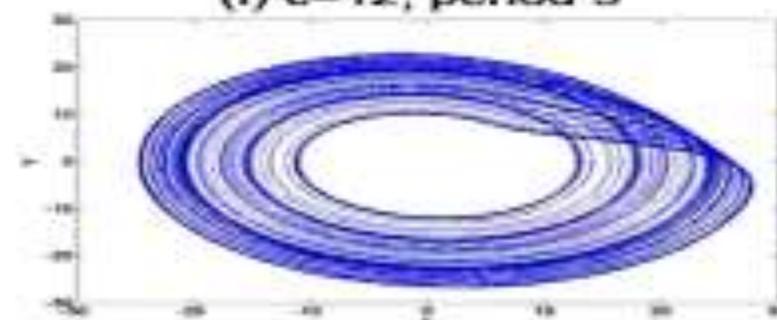
(f)  $c=12$ , period 3



(g)  $c=12.6$ , period 6



(h)  $c=13$ , chaotic



(i)  $c=18$ , chaotic

## **Практическая направленность задачи №1.**

Поскольку с параметрами  $(R_0, r_0, \lambda)$  полосы Мёбиуса можно связать морфофункциональные характеристики миокарда (толщины, габариты, массу), определяемых ЭХОкг, а с параметрами преобразования Мёбиуса  $(\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}, \hat{d})$  можно связать аритмологические характеристики миокарда (зубцы RR, интервалы QT, PQ и т.д.), определяемые через параметры  $(R_0, r_0, \lambda)$  и параметры  $(\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}, \hat{d})$ , то значения параметров  $(a, b, c)$ , характеризуют хаотично/упорядоченные решения аттрактора Ресслера

**Задача №1.** Требуется установить связь между коэффициентами аттрактора Ресслера  $(a, b, c)$  и коэффициентами преобразования Мёбиуса  $(\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}, \hat{d})$  для поверхности Мёбиуса с параметрами  $(R_0, r_0, \lambda)$

Тем самым должна быть установлена связь между решением уравнений Ресслера (хаотично/упорядоченное решение) и эллиптической/параболической/гиперболической устойчивостью преобразования Мёбиуса в зависимости от параметров  $(R_0, r_0, \lambda)$ , то есть, хаос/порядок (параметры  $a, b, c$ ) связаны с устойчивостью преобразования (параметры  $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}, \hat{d}$ ) поверхности Мёбиуса  $(R_0, r_0, \lambda)$  (см. Приложение).

## **Этапы работы**

**Этап №1.** Связь формульного описания полосы Мёбиуса  $F(x, y, z, R_0, \lambda)$  с дифференциальным описанием (аттракторное описание) для определения  $(a, b, c)$  как функции  $R_0, r_0, \lambda$

**Этап №2.** Связь формульного описания полосы Мёбиуса  $F(x, y, z, R_0, r_0, \lambda)$  с преобразованием Мёбиуса  $f(z): z = \sqrt{x^2 + y^2}$  – для поверхности Мёбиуса

**Этап №3.** Связь формульного описания преобразования Мёбиуса  $f(x, y, z, \hat{a}, \hat{b}, \hat{c}, \hat{d})$  с дифференциальным описанием (аттракторное описание) для определения  $(a, b, c)$  как функции  $(\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}, \hat{d})$ .

# Спасибо за внимание!

Арутюнов Ю.А., к.ф.- м.н., ведущий научный сотрудник ФГБУ  
ФНКЦСМ ФМБА России

E-mail: [double-spiral@yandex.ru](mailto:double-spiral@yandex.ru)

Мобильный телефон: +7(964)5853766

Рабочий телефон: +7(499)7956853